

## Calcul du groupe de Poincaré

Cellules  
contractiles

Le lecteur pourra exercer sa sagacité en établissant les résultats suivants :

- (1) (a) Nous dirons qu'un espace  $E$  est *décomposable* si  $E$  est la réunion d'ouverts connexes deux à deux disjoints  $U_j$ .
- (b) Une telle décomposition est unique ; l'ouvert  $U_j$  qui contient un point  $x$  de  $E$  s'appelle *composante connexe* de  $x$ . Parmi les ouverts qui contiennent  $x$ ,  $U_j$  est le plus grand qui soit connexe, le plus petit qui soit fermé.
- (c) Pour qu'un espace  $E$  soit décomposable, il faut et il suffit que chaque point de  $E$  soit contenu dans un ouvert connexe.
- (2) — On dit qu'un espace  $E$  est *localement connexe* si tout ouvert de  $E$  est décomposable ; c'est le cas notamment pour les variétés, puisque tout ouvert d'une variété est une réunion de *morceaux*, qui sont connexes.

**Théorème :**

Soit  $E$  un espace *connexe*.

On suppose qu'il existe un ensemble  $C$  de parties de  $E$ , que nous appellerons *chambres* de  $E$ , doué des propriétés suivantes :

- (3) Chaque point de  $E$  appartient à une chambre ;  
Les chambres sont des ouverts simplement connexes ;  
L'intersection de deux chambres est décomposable.  
Alors  $E$  possède un revêtement universel.

- (4) — Ces conditions sont vérifiées si E est une variété connexe : il suffit de prendre pour C un recouvrement de E par des morceaux. Donc toute variété connexe possède un revêtement universel.

Pour construire effectivement le revêtement universel indiqué dans ce théorème (3), on peut procéder de la façon suivante :

$u$  et  $v$  étant deux chambres, désignons par  $A_{uv}$  l'ensemble des composantes connexes de  $u \cap v$  ; les éléments de  $A_{uv}$  s'appelleront des *antichambres*.

On appellera *portes* les symboles

$$(u, a, v) \quad [u, v \in C, a \in A_{uv}].$$

On désignera par M le *monoïde libre engendré par les portes* ; on suppose M muni d'un élément neutre  $\mathbb{1}_M$  (voir la note I).

Nous dirons qu'un mot de M est un *passage* (de la chambre  $u$  à la chambre  $z$ ) s'il est de la forme

$$(u, a, v)(v, b, w) \dots (y, e, z)$$

- (5) chaque porte partant de la chambre où conduit la chambre précédente ; un passage d'une chambre  $u$  à la même chambre s'appellera un *circuit* ; un circuit

$$(u, a, v)(v, b, w) \dots (y, e, u)$$

sera dit *trivial* si l'intersection de ses antichambres  $a, b, \dots, e$  n'est pas vide.

On choisit une chambre  $u_0$  (*l'entrée*) ; pour toute autre chambre  $u$ , on peut choisir un passage  $m_u$  de  $u_0$  à  $u$ , que l'on appellera *passage balisé* (1).

Soit K la partie de  $M^2$  composée des couples

$$\begin{pmatrix} \mathbb{1}_M \\ m \end{pmatrix}$$

$m$  étant un *circuit trivial* ou un *passage balisé* quelconque.

(1) Cette propriété est équivalente au fait que E soit connexe.

Désignons par G le monoïde quotient  $M/K$  ; par  $\{u, a, v\}$  l'image de la porte  $(u, a, v)$  par l'homomorphisme canonique de M sur G (voir la note I) ; par  $[u, g, v]$  la réunion des antichambres  $a$  telles que  $\{u, a, v\} = g$ .

- (5) Alors G est un *groupe* ; on a notamment  $\{u, a, v\}^{-1} = \{v, a, u\}$  ; les ensembles  $[u, g, v]$  vérifient les axiomes  $\heartsuit$  du théorème (10.16) ; le revêtement E' construit à partir de ces ensembles par la méthode du théorème (10.17) est un *revêtement universel* de E ; G est donc le *groupe de Poincaré* de E.

#### Exemples :

— On considère la sphère  $S_n$ , variété de dimension  $n$  plongée dans l'espace euclidien  $R^{n+1}$ , d'équation  $|x| = 1$  ; l'ouvert  $u_0$  obtenu en privant  $S_n$  d'un point  $x_0$  est simplement connexe (en effet, une projection stéréographique est un homéomorphisme de  $u_0$  avec  $R^n$ ) ; de même  $u_1$  obtenu en privant  $S_n$  du point opposé  $-x_0$ .

On peut donc prendre  $u_0$  et  $u_1$  comme chambres ; l'intersection  $u_0 \cap u_1$  (que la projection stéréographique envoie sur  $R^n$  privé d'un point) est connexe si  $n \geq 2$  ; en appliquant la construction (5), on constate que le groupe G est réduit à l'élément neutre ; donc :

- (6) La sphère  $S_n$  est simplement connexe si  $n \geq 2$ .
- (7) — Dans le cas  $n = 1$ , l'intersection  $u_0 \cap u_1$  se compose de deux antichambres ; on en déduit que le groupe de Poincaré de  $S_1$  est Z ; ce résultat a déjà été trouvé par une autre méthode (10.35).
- (8) — Si E est le plan privé d'un point, deux demi-droites issues de ce point déterminent deux chambres  $u_0$  et  $u_1$  dont l'intersection se compose de deux antichambres ; le groupe de Poincaré est donc le même que pour  $S_1$ , c'est-à-dire Z.
- (9) — Soit E le plan privé de deux points A et B ; en privant E de la droite AB, elle-même privée de l'un des intervalles limités par A et B, on construit trois chambres qui recouvrent E ; il y a deux

antichambres dans leurs intersections mutuelles ; on en déduit le groupe de Poincaré : c'est le *groupe libre* à deux générateurs (voir la note I).

— En partant de la remarque que le produit direct de plusieurs morceaux de variété est un morceau de la variété produit, donc simplement connexe, la construction (5) permet d'établir le théorème :

Soient  $V_1, V_2, \dots, V_n$  des variétés connexes.

- (10) Le groupe de Poincaré de la variété produit  $V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  est le produit direct des groupes de Poincaré de ces variétés.
- (11) — En particulier, le produit direct de  $n$  variétés simplement connexes est une variété simplement connexe.