

Particules vectorielles chargées

Étudions, en relativité à 5 dimensions, un champ de covecteurs Φ ; nous désignerons par Φ_i les composantes de Φ dans une carte standard.

Comme dans le cas quadridimensionnel (voir (37.1) à (37.14)), on est amené à introduire la 2-forme

$$(1) \quad \Psi = \nabla \Phi$$

et on est conduit à l'équation de champ

$$(2) \quad \text{div } \Psi + a \Phi = 0 \quad (a \in \mathbb{R}).$$

Le système (1), (2) entraîne les équations

$$(3) \quad \text{div } \Phi = 0; \quad \square \Phi + a \Phi = 0; \quad \nabla \Psi = 0; \quad \square \Psi + a \Psi = 0$$

en désignant par \square le laplacien penta-dimensionnel sur les formes (30.49) [on suppose $a \neq 0$].

Décomposons Φ et Ψ en série de Fourier suivant x^5 :

$$(4) \quad \Phi = \sum_n \Phi_n e^{inx^5} \quad \Psi = \sum_n \Psi_n e^{inx^5}$$

Φ_n et Ψ_n ne dépendant que des x^j (indices grecs = 1,2,3,4).

Introduisons les variables quadridimensionnelles complexes

$$(5) \quad \Phi_\mu = [\widehat{\Phi}_n]_\mu; \quad \Psi_{\mu\nu} = [\widehat{\Psi}_n]_{\mu\nu}; \quad \varphi = \frac{1}{\xi^2} [\widehat{\Phi}_n]_5; \quad \theta_\mu = \frac{1}{\xi^2} \{ [\widehat{\Psi}_n]_{\mu 5} + \text{in } \Phi_\mu \}$$

le signe \wedge désignant les composantes transverses. Les formules du § 41 permettant de calculer

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_\mu = \Phi_\mu + \xi^2 \varphi \mathcal{A}_\mu \\ \Phi_5 = \xi^2 \varphi \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{\mu\nu} = \Psi_{\mu\nu} + [\xi^2 \theta_\mu - \text{in } \Phi_\mu] \mathcal{A}_\nu - [\xi^2 \theta_\nu - \text{in } \Phi_\nu] \mathcal{A}_\mu \\ \Psi_{\mu 5} = -\Psi_{5\mu} = \xi^2 \theta_\mu - \text{in } \Phi_\mu \\ \Psi_{55} = 0 \end{array} \right.$$

(on a sous-entendu l'indice n).

En portant dans le système (1), (2), et en supposant ξ constant, il vient

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi - \text{Ext } (\mathcal{A})(\xi^2 \theta - \text{in } \Phi) = \nabla \Phi + \xi^2 \nabla [\varphi \mathcal{A}] \\ \theta = \nabla \varphi - \text{in } \varphi \mathcal{A} \\ \text{div } \Psi - \text{in } \text{Int } (\overline{\mathcal{A}}) \Psi + \text{in } \theta + \left[a + \frac{n^2}{\xi^2} \right] \Phi = 0 \end{array} \right.$$

et une équation scalaire; Si $n \neq 0$, on peut la remplacer par la première des équations (3), qui s'écrit:

$$(8) \quad \text{div } \Phi - \text{in } \text{Int } (\overline{\mathcal{A}}) \Phi - \text{in } \varphi = 0.$$

Posons:

A, F: potentiel et champ électromagnétiques;

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\nabla} = \nabla - \frac{\text{in } e}{\hbar} \text{Ext } (\mathcal{A}); \quad \widetilde{\text{div}} = \text{div} - \frac{\text{in } e}{\hbar} \text{Int } (\overline{\mathcal{A}}); \\ \varphi = \text{in } \varphi; \quad \frac{m^2}{\hbar^2} = a + \frac{n^2}{\xi^2} \quad (\text{cf. (42.13)}) \end{array} \right.$$

alors le système (7) (8) s'écrit:

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Psi = \widetilde{\nabla} \Phi + \frac{\xi^2 e}{\text{in } \hbar} \varphi F \\ \varphi = \widetilde{\text{div}} \Phi \end{array} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{\text{div}} \Psi + \widetilde{\nabla} \varphi + \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi = 0 \end{array} \right.$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = \frac{1}{\text{in}} \widetilde{\nabla} \varphi \end{array} \right.$$

On voit que l'on peut supprimer la variable θ et l'équation (12); on peut aussi tirer Ψ et φ de (10) et porter dans (11); indiquons le résultat de cette élimination dans deux cas:

a) *Absence de champ* ($A = 0$).

Il vient

$$(13) \quad \square \Phi + \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi = 0.$$

Cette équation se décompose canoniquement en

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} \square \Phi_1 + \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi_1 = 0, \quad \text{div } \Phi_1 = 0; \quad \square \varphi_2 + \frac{m^2}{\hbar^2} \varphi_2 = 0 \quad [\varphi_2 \in C], \\ \Phi = \Phi_1 + \nabla \varphi_2 \end{array} \right.$$

b) *Relativité restreinte*.

En faisant les approximations de la relativité restreinte, et en négligeant le dernier terme de la première équation (10) (1), on trouve l'équation

$$(15) \quad g_{\mu\nu} \left[\partial_\mu - \frac{\text{in } e}{\hbar} A_\mu \right] \left[\partial_\nu - \frac{\text{in } e}{\hbar} A_\nu \right] \Phi_\sigma + \frac{m^2}{\hbar^2} \Phi_\sigma + \frac{\text{in } e}{\hbar} F_{\mu\nu} \Phi^\mu = 0;$$

(1) Dans les unités quantiques usuelles, $\frac{\xi^2 e}{\hbar} \neq 10^{-48} \text{ cm}^2$.

c'est l'équation d'onde d'une particule de masse m , de spin 1, de charge ne , de coefficient gyromagnétique $g = 1$ (la décomposition (14) disparaît en présence du champ).

On a effectivement observé des particules de spin 1, de charge $\pm e$, ayant des masses diverses; leur durée de vie est trop brève pour qu'on ait pu mesurer g ; mais la valeur $g = 1$ prévue par la présente théorie semble naturelle, si on considère une telle particule comme la fusion de deux particules de Dirac, l'une chargée (pour laquelle $g = 2$), l'autre neutre.

Il semble en particulier que les *interactions faibles des leptons* et la *radioactivité β* peuvent se décrire au moyen d'un lagrangien d'interaction faisant intervenir les fonctions d'onde d'un lepton chargé (un électron par exemple), d'un lepton neutre (neutrino) et d'une particule vectorielle chargée; soit ψ_e , ψ_ν et Φ respectivement (ν est mis ici pour *neutrino*).

ψ_e et ψ_ν sont des spineurs de l'univers U à 5 dimensions; Φ un (co)vecteur; il est donc naturel de proposer comme lagrangien d'interaction l'expression

$$(16) \quad l = \Re(b \bar{\psi}_e \cdot \gamma(\Phi) \cdot \psi_\nu) \quad [b \in \mathbb{R}]$$

qui est invariante à la fois dans les glissements de U et dans la transformation de jauge des leptons

$$\psi_e \rightarrow \psi_e q, \quad \psi_\nu \rightarrow \psi_\nu q \quad (q = \text{quaternion de norme } 1).$$

En exprimant l au moyen des grandeurs quadridimensionnelles (formules (6); formules 56, 57, 68, 74, 77, 78 du § 45), il vient:

$$l = \Re \left(\bar{b} \bar{\psi}_e \cdot \left[P' - \frac{P''}{i\lambda} \right] \cdot [\hat{\gamma}^p \Phi_p - \beta \xi \varphi] \cdot \psi_\nu \right),$$

ξ est très petit, λ très petit ou très grand (voir (45.78)); en réduisant l au terme prépondérant, il reste

$$l = \Re(g \bar{\psi}_e \hat{\gamma}^p \Phi_p [1 \pm i\beta] \psi_\nu)$$

g étant une constante de couplage réelle ou imaginaire pure; ou, en notations classiques

$$(17) \quad l = g \Phi_p \bar{\psi}_e \hat{\gamma}^p \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \psi_\nu \quad + \text{ herm. conj.}$$

Or c'est précisément cette expression (17) que l'expérience a conduit à adopter pour rendre compte des diverses particularités des désintégrations leptoniques: non-conservation de la parité, émission d'électrons polarisés et de neutrinos à deux composantes, etc.

Tous ces phénomènes apparaissent donc comme directement liés au principe de relativité à cinq dimensions.