GRAMMAIRE DE LA NATURE

JEAN-MARIE SOURIAU

PRINCIPALES NOTIONS ABORDÉES :

abstrait,10
action,172
âge de l'Univers,216
aléa,85,148,149,153,211
analyse dimensionnelle,189
analyse harmonique,19
anatomies,176
année sidérale,199
années-lumière,105
antimatière,141
atome,7,81,133,160
attaché,174
Big Bang,125,129,131,251
bosons,161
Bruno,124
caverne de Platon,90
centre,170
chaleur,89,123
champ magnétique,140
chaos,78
charge électrique,78,139,140,147
chaud,87
Chimie Quantique,161
chose,75,76
choses,29,31,45
Chronos,4,42,43,63,188,232
chute des corps,112
collisions,112
comètes,200
conditions initiales,78
conjugaisons de charge,141
constante cosmologique,118,213
constante de Hubble,134
constante de la gravitation,118
constante de Planck,40,122,145,154
cordes,113
corps noir,122
Cosmos,119
couleur,72,194,206
courbure,116,213
décalage spectral,213
densité,113,213
déterminisme,78
difféologie,245
dissipation,84
dissonances,99
dynamique,116,118
$E = mc^2$,71,**204**
effet Doppler,73,107,207
effet photoélectrique,206
Einstein,67,119
électricité,138
électro-dynamique,139
électromagnétisme,138
éléments,16
énergie,55,56,60,63,80
enrichir une géométrie,174,203
entropie,85
équation d'Einstein,118
équations d'onde,162
équilibre froid,91,103
équilibre thermodynamique,86
espace cosmologique,126,128,135
espace des mouvements,45,76,78,80,83,146
espace homogène,173
espace quotient,173
espace-temps,44,188
espèce,29,173
espèce de moments,78
état,84,153,187,210
état quantique,150,154,162,253,256
état statistique,84
états purs,157
événements,43
expansion,107
famille,29
famille de moments,39,76,80,146,147
fermions,161
fibré quantique,147
firmament,18
flèche du temps,122
force,78
futur,131

galaxie,92,105
Galilée,47,112,124
géodésie spatiale,190
géométrie,31,149,172
géométrie analytique,188
géométrie galiléenne,189
géométrie souple,111
géométrie symplectique,39,78,79
GPS,190
gravité,109
groupe,3,28,167
groupe cosmogonique,126,136
groupe d'Aristote,43
groupe de Bruno,48,188
groupe de Galilée,48,189
groupe de Poincaré,67,202
groupe de Thalès,38
Groupe d'Euclide,*4*,25,188
groupe électrique,139
groupe électro-souple,139
groupe linéaire,181
groupe souple,111
groupes cristallographiques,33
hasard,84,148,153,187
hydrodynamique,113
Hyper-galaxies,134
immobilité,43
impesanteur,109
impulsion,58,60
Incertitude,156
interférences,158
irréversible,83
Jupiter,237
Kepler,109,198,199
ket,158,162
liberté,175
ligne d'Univers,44
longueur d'onde,195
lumière,39,65
Lune,93
magnétisme,138
marées,92
masse,58,60,204,205
matérialité,74,154,191,203
matrices,178
mécanique,46,78
mécanique céleste,109
mécanique quantique,145,150
mécanique statistique,84,150
métaphysique,76
métrique,117
mirage gravitationnel,120
mobilité,50,51,226,230
modèle standard,164
modèles,13
moment,39,60,63,115,140,146
moments galiléens,191
Monte-Carlo,212
morphisme,170,171
mouvement,45
mouvements naturels,47
moyennes,210
mpulsion,63
nature,6
Neptune,119
neutrino,62
Newton,78,109,195,196
Nombre d'Or,98
non séparable,159
normalisateur,170
noyau,170
observation,153
oscillateurs,52
particule à spin,194
particule élémentaire,63,193,205
passage,60,63
passé,129
permutation,172
pesanteur,109,111
photon,65,160,194
Physis,118
planètes,97
poids,115
point matériel,194,205
premier principe,85,86
présence,112
pression,113
principe de relativité,48
principe d'exclusion,160
Principe Général de Relativité,111
probabilités,209
quasar,92,106,190
quasi-cristal,36
Quasi-régulier,34

quintessence,16
rasoir d'Ockham,121
régularité,4,17,30,173,175
Saturne,238
second principe,85,123
source,75,80,146,149
sous-groupe,43,169
sous-groupe normal,170
spectre,107,145,154
spin,64,113,194,205
statistique quantique,157
super-fluidité,160
Super-Galaxie,134
supernova,133
symétrie,30,173
température,87,131
temps,44
temps propre,67
tenseurs,13
théorie des nœuds,177
théorie des quanta,145
thermodynamique,84
tournoiement,60,63,145,198
transformations de Lorentz,68
transposition,181
type,29,118
type de moment,76
Univers,43,108,124
vecteur de Lenz,198
vecteur température,89,122
vibrations,52,79
viscosité,123
Voie Lactée,105
Zodiaque,95

mode d'emploi

Ce livre se compose de trois parties :

pages blanches, ***pages jaunes***, ***pages rouges***.

Les ***pages blanches*** s'adressent à tout lecteur : elles ne demandent pas de connaissances scientifiques préalables.

On y raconte l'histoire de quelques « ***idées*** » parmi celles qui ont animé les sciences ; idées qui ouvrent encore diverses perspectives.

Les ***pages jaunes*** sont destinées aux jeunes lecteurs ayant vocation à la recherche ; et à quelques autres peut-être…

Les « ***clés*** » qui figurent dans ces pages jaunes sont des ***outils*** *mathématiques,* élémentaires mais puissants ; outils qui servent à décrire *l'espace, le temps, la matière.*

Les ***pages rouges,*** pour ceux qui veulent approfondir.

Le signe ✯, qui apparaît déjà dans les pages blanches et jaunes, repère les ***liens*** entre les diverses idées évoquées.

RÈGLE DU JEU

Devant vous, un écran s'allume.

Au centre, vous apercevez la lettre ***S*** ; d'autres lettres sont réparties sur l'écran, inclinées dans tous les sens ; certaines retournées, d'autres pas.

Le jeu est simple : la même lettre ***S*** figure une seconde fois quelque part sur l'écran, il faut réussir à l'y pointer avec une commande. Le plus vite possible : vous serez chronométré.

Quelques secondes suffisent pour un joueur exercé. Mais ce qui est curieux, c'est qu'il ne faut guère plus d'un dixième de seconde à un chimpanzé pour atteindre la bonne lettre.

Bizarre… Pourquoi est-il tellement plus rapide que nous ?

Sans doute parce que ce genre de rapidité lui est plus nécessaire qu'à nous : un habitant des arbres, qui dégringole souvent de branche en branche, a besoin de se repérer dans l'espace plus rapidement qu'un simple promeneur. En un dixième de seconde, on ne tombe que de cinq centimètres ; en deux secondes, de vingt mètres.

Quand nous jouons à ce jeu, nous imaginons la lettre ***S*** qui se déplace, qui tourne, qui fuit. Et quand cette image mentale mobile rattrape l'image fixe aperçue sur l'écran, nous avons gagné.

Nous utilisons donc la possibilité de transporter mentalement les images, de leur faire subir certaines actions : rotations, déplacements, etc.

Ces actions-là ont entre elles des relations très particulières ; les géomètres en ont fait l'inventaire ;

et cet inventaire, ils l'appellent **groupe**.

Attention ! derrière ce petit mot "groupe", se cache un « *universel* » de la pensée. Un instrument pour concevoir le monde.

Tout à l'heure, naïvement, nous avions écrit « *la même lettre **S*** ». Une lettre ***S*** quelque part, et ailleurs *la même lettre*, qu'est-ce que ça signifie au juste ?

Deux fois la même lettre, ça veut dire deux lettres apparamment différentes (elles diffèrent par leur place sur l'écran), mais que l'on peut reconnaître comme identiques en *transportant* l'une sur l'autre (un transport mental suffira).

Nous ne pouvons dire « *la même* » ou « *pas la même* » que si nous avons pris en compte l'organisation de ces transports. Et cette organisation, *c'est le groupe*.

Qu'est-ce qu'un nombre ? C'est le résultat de l'art de compter.

Pour compter, les enfants apprennent d'abord à ne pas compter deux fois la même bille dans un sac de billes. *La même bille* ? Nous y voilà.

Chaque fois qu'on compte des choses, on manie implicitement un groupe, qui détermine comment ces choses sont à la fois *distinctes* — pour ne pas les compter deux fois — et *semblables* — pour les reconnaître comme équivalentes et les compter de la même façon. C'est ainsi que le groupe est antérieur, dans notre pensée, à d'autres catégories que nous pourrions croire primitives, comme « le nombre » ou « l'espace ». Le groupe spatial ? Si les singes et les hommes savent le manipuler aussi vivement, c'est qu'il s'agit d'un outil disponible à un niveau très primitif de la pensée ; peut-être est-il "câblé" quelque part dans notre cerveau, comme dans celui des animaux qui possèdent une compétence spatiale analogue à la nôtre.

Niveau si primitif que ce groupe reste implicite la plupart du temps dans l'expression de la pensée.

Peut-on gagner quelque chose à rendre le groupe plus explicite ? Cela s'est produit à Alexandrie, il y a vingt-trois siècles. Dans le traité d'Euclide, les " *Éléments* ", on découvre l'art de transporter les figures en utilisant un groupe — nous dirons aujourd'hui le *Groupe d'Euclide*. Et cette œuvre a marqué l'essor de la géométrie.

Et la physique ? Le propre du physicien, c'est de faire des expériences reproductibles. De savoir faire deux fois la même expérience. Deux fois la même ? nous y revoilà…

Simple remarque : le physicien doit pouvoir reproduire une expérience *ailleurs* (en utilisant le groupe spatial d'Euclide), mais aussi la reproduire *plus tard* : il utilise aussi le groupe temporel, groupe qui retarde ou avance les événements.

Il est déjà dans notre tête, ce groupe « *Chronos* », où il transporte les images mentales. Il permet d'entasser dans la mémoire les souvenirs, *et aussi les souvenirs de souvenirs*.

Reproduire un mouvement, soutenir un rythme ? C'est Chronos qui nous le permet, ce groupe dont les musiciens sont les experts.

La physique est construite à la fois avec le Groupe d'Euclide, celui de la géométrie, et avec Chronos. Mieux : ces deux groupes s'associent entre eux, ils n'en forment plus qu'un — créant ainsi une géométrie nouvelle.

Géométrie de la matière et du mouvement ; géométrie qui est l'architecture de l'espace et du temps.

Géométrie qui a été perfectionnée grâce aux expériences de pensée de Giordano Bruno et de Galilée sur les mouvements à l'intérieur d'un bateau lui-même en mouvement.

Géométrie qui s'est précisée, il y a un siècle, par une analyse plus serrée des groupes — par la création de la *théorie des groupes.*

Théorie bien utile pour savoir de quoi nous parlons tous les jours. Voyez donc :
nous disons "la même distance", "la même durée", "au même instant", "la même molécule", "la même mélodie", "la même forme" …; chacun de ces "*même*"-là implique *un groupe* ; et ce sont ces groupes qui créent les *espèces* appelées distance, durée, instant, molécule, mélodie, forme.

La classification des choses en espèces, ça se fait avec un groupe.

Il y a des *régularités* dans la vie : battements de cœur, symétrie des feuilles, croissance des coquillages…. ; *des régularités techniques* : celle des tours à bois ou à métaux, des billes de roulement, des montres à quartz…; *des régularités naturelles* qui distribuent les atomes dans les cristaux, les galaxies dans l'univers. La planète Terre, née dans le tumulte et la fureur, a acquis progressivement sa rondeur et sa rotation si parfaites : *régularités* auxquelles nous devons à la fois l'espace où nous vivons et le compte de nos jours.

La régularité d'une chose, c'est un groupe.

Nous nous formons des images mentales pour évoquer la réalité, pour en parler. Lorsque des groupes permettent d'agir sur ces images, ils leur confèrent une objectivité qui permet de les communiquer d'un esprit à l'autre. Choisissons : ou bien nous prenons conscience des groupes et de leurs actions ; ou bien nous restons passifs devant l'Univers : temps, espace, énergie, matière …

Les chaussures sont un outil pour marcher ;
les mathématiques, un outil pour penser.
On peut marcher sans chaussures, mais on va moins loin.

I

LA NATURE ET LA SCIENCE

THÉÂTRE DE LA NATURE

décor naturel

Tous, nous aimons et nous connaissons la nature : les forêts, les montagnes, les animaux sauvages.

La nature, c'est la vie.

nature morte

Sur la Lune, il y a des montagnes et des plaines. C'est encore la nature ; mais morte.

Et la mort ? c'est une loi naturelle.

Mort et vie, deux faces de la nature.

extraits naturels

Quel est le contraire de «*naturel* » ? « *artificiel* »*,* sûrement.

Artificiel : fait par l'art.

On aime tant la nature qu'on hait l'artificiel. Ceux qui vendent une boisson ou un yaourt au goût de fraise, et qui ont honte de le faire par artifice, annoncent un *extrait naturel de fraise*.

Règle d'or de la publicité, affirmer le contraire de ce qui est évident : rien de plus artificiel qu'un extrait, on le proclamera naturel. C'est une publicité si évidemment « mensongère » qu'on ne songe pas à sévir : elle ne sert qu'à atténuer le regret de ceux qui ne mangent pas une fraise *naturelle*.

Mais sont-elles si naturelles, ces fraises ? cultiver son jardin, c'est aussi un art…

Comment méconnaître que la nature que nous connaissons : les champs, les prés, les bois, c'est presque entièrement l'œuvre des paysans depuis quelques milliers d'années ? Leur artifice ?

Artifice : nature de l'homme.

mise en scène

Tout est donc nature : vivant ou non, artificiel ou non. Alors c'est n'importe quoi, la nature ?

Non, la nature, voyons-la comme un théâtre où dialoguent les innombrables acteurs d'un drame.

Parmi les acteurs, les choses ; et nous-mêmes, les personnes, qui déclamons notre texte. Nous y témoignons de nos *observations*, de notre *connaissance* des gens et des choses.

Certains de ces textes ont pour objet la nature elle-même ; voici deux exemples :

- "*La Nature des choses*" *(de Rerum Natura),* œuvre du poète latin Lucrèce, au premier siècle avant JC. Poème qui met en scène les atomes et les hommes, qui rapporte l'enseignement de Démocrite (V^{ème} siècle) et d'Épicure (III^{ème} siècle).
- "*Philosophie naturelle* " *(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica),* œuvre de Newton (1686).

Deux scènes extraites de ce grand drame qu'on appelle *la science.*

Parmi les divers modes de connaissance, celui de la science a une vertu spécifique: activer le drame naturel en donnant aux personnes un certain pouvoir sur les choses, la technique.

Technique qui donne un rôle nouveau aux choses : celui de leurs réactions à nos essais de pouvoir.

Rôle que nous traduisons dans notre propre discours.

Cette scène où se répondent divers acteurs de la science, c'est *l'expérimentation* ; et cette expérimentation réalimente la connaissance scientifique.

LE TEMPS DE PENSER

plus universels les uns que les autres

Quelles sont, dans la nature, les choses avec lesquelles la science nous apprend à dialoguer ?

Les objets « naturels », pour les scientifiques, ce sont les objets qui existent partout : les atomes, les molécules, la lumière, l'espace : des objets

universels.

Les géologues s'occupent en principe de la seule Terre ; mais ils étendent leur science par la « planétologie » sans éprouver de trouble particulier ; la géologie devient ainsi universelle.

Et les biologistes ? Ils sont fermement ancrés dans la science, sans pourtant que rien ait encore prouvé que la vie s'étende au-delà de notre planète.

Il est cependant permis de penser (et c'est le credo de la biologie moléculaire) que les agencements d'atomes qui supportent la vie sur Terre pourraient être animés de vie sur toute autre planète présentant des conditions analogues.
Les mathématiques — la plus dure des sciences, dit-on — posent une question un peu plus délicate : qu'est-ce qui permet de croire que leur objet est universel ?

Leur objet, c'est la vérité mathématique. Mais quel est le critère de la vérité mathématique ? rien d'autre que

la décision souveraine de la communauté des mathématiciens.

Ainsi se singularise la scène mathématique parmi les scènes de la science : rien que des personnes, qui tiennent aussi le rôle de l'objet.

Bien restreinte dans l'Univers, cette communauté des mathématiciens ! S'il est vrai qu'un perroquet ait appris à compter jusqu'à trois, l'universalité des mathématiques n'a que peu augmenté.

Quelques faits militent cependant pour une universalité plus grande. Un exemple : les microprocesseurs matérialisent des objets bien mathématiques, comme les « *cosinus* » ou les « *logarithmes* » ; or ces processeurs fonctionnent parfaitement — et utilement — n'importe où, sur la planète Mars par exemple.
Mais depuis longtemps, bien des mathématiciens affirment l'universalité de leur art sans se préoccuper d'en donner la moindre preuve. Ils assurent que "deux et deux font quatre partout ", sans avoir été le vérifier. D'où tiennent-ils ce droit ?

Regardons-les travailler, ces mathématiciens.

la malle et les lingots

Vous êtes quelqu'un de raisonnable, et ce soir vous avez chez vous un ami mathématicien. Il semble un peu rêveur, un peu distrait ; dans l'espoir d'animer la conversation, vous lui posez une question qui devrait lui plaire :
— Tu as une malle dont l'intérieur est un cube de côté m ; peux-tu la remplir complètement avec des lingots d'or dont les arêtes mesurent a, b, c ?

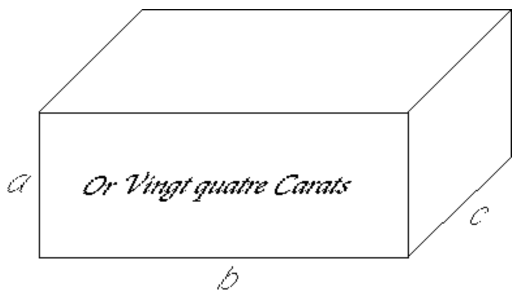

Figure 1. élément d'un trésor

Après les quelques secondes nécessaires pour passer courtoisement du problème qu'il méditait au problème que vous lui offrez,le mathématicien vous répond :

— Il *suffit* que m soit divisible par a , par b et par c ; alors on peut remplir la malle en alignant simplement les lingots, tous dans le même sens, en plusieurs couches semblables :

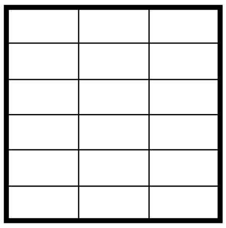

Figure 2. dix-huit lingots au fond d'une malle

Oui. Mais il y a plusieurs façons de remplir la malle :

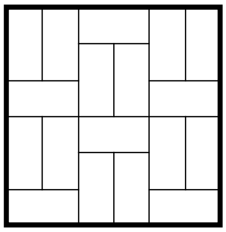

Figure 3. un rangement plus élégant ?

et on peut aussi poser certains lingots sur la tranche. Alors je me demande : est-ce que cette divisibilité est vraiment *nécessaire* ? "
Vous n'aviez pas pensé à toutes ces façons de ranger ; comment s'y retrouver ?

Comme vous avez une réelle affection pour votre ami, vous le laissez méditer, puisque ça l'intéresse.

Ça dure un moment — dix minutes, une heure, six heures : *il prend vraiment le temps de penser.* Il tient le coup en absorbant un petit café bien sucré de temps en temps ([1]).

Soudain il saisit un petit papier, écrit une formule mystérieuse qui le remplit d'une grande joie, et il s'écrie " Maintenant je le sais :

Cette divisibilité est nécessaire et suffisante ! "

Vous avez grande confiance en lui, et vous ne vous permettez pas de le contredire. Pourtant, par-devers vous, vous savez bien que sa condition n'est pas suffisante, qu'il a oublié ce qu'il y a de plus *nécessaire* pour ranger des lingots d'or dans une malle : il faut les avoir, ces lingots.

Tout le monde le sait, mais le mathématicien feint de l'oublier ; ce n'est pas ça qui l'intéresse.

Il a été tout content de découvrir qu'on pouvait ranger les lingots de diverses façons dans la malle (fig. 3), et maintenant il est encore plus content d'avoir réussi à démontrer, au bout de six heures, que ça ne sert à rien : si on peut remplir la malle, sa condition garantit qu'on peut toujours le faire par simple alignement (fig. 2).

Pourquoi consacre-t-il tant de temps à des détails aussi futiles ? Pas futiles pour lui, en tout cas. Quand il a décidé de faire de l'ordre dans sa tête, il le fait à fond, et il prend le temps qu'il faut.

---

1 Le cerveau qui pense a besoin d'être alimenté, et consomme ainsi une certaine puissance : une quinzaine de watts pour la contemplation courante d'une émission de télévision, près d'une centaine de watts pour un calcul mental difficile exécuté avec virtuosité. Si un professeur de mathématiques arrive à passionner une classe dans une salle glaciale, la salle n'est plus glaciale au bout d'une heure : 35 têtes à 75 watts, ça chauffe. Penser, c'est une activité aussi concrète que nager ou sauter, et ça a des exigences comparables.

Et vous ? Combien de temps, par exemple, aurez-vous mis à le lire, ce texte, « *le temps de penser* » ?

Si ce temps est moindre que dix minutes, vous l'avez peut-être bien perdu, votre temps : lecture rapide, lecture foutue !

les noms et les parfums tournent dans l'air du soir

Fatigué par son exploit, le mathématicien est allé dormir.

Vous êtes un peu démoralisé(e) : comment communiquer avec lui ? y a-t-il une seule chose qui soit claire à la fois pour lui et pour vous ? Par exemple, pourquoi dit-il « *il suffit* » quand vous diriez « *il faut* » ?

La formule abstraite qu'il a écrite tout à l'heure, et qui lui semblait si prodigieuse, il l'a laissée là, sur votre table. Vous l'examinez respectueusement :

$$\boxed{\iiint e^{\frac{2i\pi}{a}(x+y+z)}\, dx\, dy\, dz = 0}$$

Figure 4. Ah ! ces matheux … ✯

Bizarre ! Quel genre de parenté a-t-elle donc avec les lingots ou la malle ?

Vous distinguez bien dans la formule la lettre a qui désigne un côté du lingot, mais pourquoi pas b et c ?

Et ces autres signes mathématiques ? ça n'évoque que de vagues souvenirs scolaires. *« i »*, est-ce que ça ne veut pas dire *imaginaire* ? Vous reconnaissez aussi le « *nombre pi* » : π = 3.14, qui sert à calculer les cercles ([1]) ; mais qu'y a-t-il de commun entre un cercle et une malle carrée ?

Abstraite, cette formule, avez-vous pensé. Et qu'est-ce que ça veut dire au juste, ce mot déplaisant, « abstrait » ? Votre dictionnaire vous répond :

abstrait = " tiré de "

Mais ça change tout ! Vous pensiez jusque-là que « *abstrait* », ça désignait quelque chose qui flotte dans l'absolu, sans rapport avec rien, et qu'on nous force à ingurgiter.

Au contraire, il s'agit d'un « *extrait naturel* »:

la formule abstraite, c'est un parfum de la réalité.

---

1 La lettre π est l'initiale du mot grec « periphereia », et exprime la longueur d'un cercle de diamètre 1. Un peu plus de précision : π = 3. 14159…; si vous êtes curieux de la suite, consultez la clé zéro (pages jaunes).

Votre ami vient donc d'isoler l'une des odeurs qu'on respire dans les vieilles malles.

Le flair des autres mathématiciens, sur quelles senteurs s'exerce-t-il ? Si vous leur posez la question, vous obtiendrez des réponses diverses.

Certains vous parleront de *physique mathématique*. Déchiffrons ce grec de cuisine :

physis = nature ; mathêma = connaissance.

Ils se déclarent ouvertement limiers de la nature, ils suivent sa trace en reniflant.

D'autres écarteront cette idée, horrifiés : ce sont ceux qui préfèrent humer l'ombre des ombres, abstraire du déjà abstrait.

Abstrait par quelqu'un d'autre, forcément : mathématiciens cannibales, ils ne répugnent pas à se nourrir des idées de leurs prédécesseurs ; ils les assimilent quand elles leur paraissent suffisamment belles et savoureuses. Leur table est délicieusement et copieusement servie : pas étonnant s'ils trouvent les mathématiques idéales…

Grâce à d'innombrables médiateurs, les mathématiques se construisent ainsi par niveaux successifs, en partant de l'abstraction la plus simple, qui sitôt nommée devient objet concret de l'abstraction suivante.

Nous allons analyser certains de ces niveaux ; mais il y en a qui sont déjà évidents : identifier, nommer, compter, additionner, par exemple.

À bien y réfléchir, il n'y a rien de si singulier dans cette façon d'agir : chaque nouveau-né, chaton ou bébé, a dû apprendre à identifier une mère unique à travers des contacts et des apparences multiples. La Mère, première et sensuelle abstraction.

Ensuite l'enfant a dit « maman ». Sachant nommer, il continue, de niveau en niveau. Parler, c'est d'abord abstraire et nommer ; et une grande partie de sa cervelle s'y consacre.

À lire et à écrire, de même, si on lui en a donné la possibilité. Sitôt nommés le « langage », l'«écriture», il sait, nous savons (plus ou moins bien) sauter au niveau suivant : on l'appelle grammaire ([1]).

Certains ont rêvé à l'arôme puissant de l'extrait qui devrait suivre, la « *linguistique générale* », clé de tous les parlers et de tous les textes, grammaire de la pensée…

Ce rôle universel, les mathématiques aussi le tiennent. Leur rôle, c'est de construire

une grammaire de la nature.

1 « Grammatikê » (sous-entendu « technê ») : art de l'écriture.

MODÉLISER LE MONDE

la loi de la gravitation est dure, mais c'est la Loi

À la fin du XIX^{ème} siècle, la physique s'exprimait par des *lois* : loi de la gravitation, loi de Mariotte, lois de Maxwell, etc. Ces lois étaient juridiques, définitives ; elles contraignaient la nature. Comme progrès, on n'envisageait que la construction de nouvelles lois pour de nouveaux objets ; ou quelque jurisprudence, précisant l'application des lois connues.
Au début du XX^{ème} siècle, apparaissent des nouveautés stupéfiantes : relativité, théorie des quanta.

Les lois classiques ne sont pas seulement modifiées, mais détruites ; tout doit être repris à zéro, même le bon sens le plus évident. Scandale !
Pourtant cette situation n'était pas sans précédents. Voyons un exemple.

Au XVII^{ème} siècle, la *loi de Boyle-Mariotte* reliait le volume et la pression d'un échantillon gazeux enfermé hermétiquement ([1]).

Cette loi n'était pas apparue sans peine : la notion de *pression* était tout juste dégagée ; quant à la notion de *volume* ([2]), il y avait deux mille ans que les mathématiciens s'évertuaient à lui offrir une définition rigoureuse — et beaucoup de travail restait à faire en ce sens.

Question naturellement posée par le succès même de cette loi de Mariotte : peut-on l'utiliser pour décrire autre chose qu'un gaz, par exemple un morceau de caoutchouc ?

Il est clair que ça ne marche pas directement : si on force une gomme à entrer dans un récipient, elle presse plus sur les parois à certains endroits qu'à d'autres ; il n'y a pas de pression d'ensemble comme dans le cas d'un gaz.

Il ne suffit donc pas d'ajuster la loi de Mariotte pour l'appliquer au caoutchouc : il faut élaborer de nouveaux concepts, choisir des mots nouveaux pour les nommer : contraintes, déformations, cisaillement, torsion, etc.

Ce n'est pas tout de nommer ; il faut aussi organiser ces mots en une « théorie », c'est-à-dire en une description *non contradictoire et prédictive* — contenant en particulier la loi de Mariotte. Une fois ces problèmes résolus, nous posséderons un

modèle de milieu continu.

---

1 Quand on comprime le gaz, volume et pression varient en sens inverse, de façon que le produit de ces deux nombres reste constant.

2 Notion que beaucoup d'enfants acquièrent en transvasant des liquides.

le physicien, l'artiste, et leurs modèles

Ce mot « *modèle* » est reconnu par l'usage. Mais attention ! le même mot est pris parfois dans des acceptions très différentes.

Un *modèle animal*, pour un biologiste, c'est l'étude des réactions provoquées chez un animal par une drogue — par opposition aux réactions de l'organisme humain.

Pour un peintre, bien sûr, le modèle, c'est la personne à peindre, et pas la peinture. Le modèle, c'est la Nature, vivante ou morte, ce n'est pas l'œuvre de l'artiste.

Mais le « modèle » du physicien, c'est la peinture qu'il donne de la réalité.

L'usage du mot "*modèle* " est donc *complètement inversé* quand on passe du peintre au physicien. Pourquoi ce renversement ?

Parce qu'il y a eu une époque où la mécanique céleste manipulait des certitudes ; où la Science semblait « exacte ». La Nature ne pouvait échapper au Modèle que lui dictait la Science.

Ces certitudes se sont dissipées, mais les ambitions de la science persévèrent.

La physique ne peut supporter les ambiguïtés et les contradictions : ses « modèles » sont donc brossés avec les couleurs franches et inaltérables de la mathématique.

C'est ainsi que les modèles des milieux continus, qui utilisent des mots que nous venons de citer : « contrainte », « déformation », nécessitent des objets mathématiques nouveaux pour les exprimer. Il a fallu inventer leur définition ; ils s'appellent « *tenseurs* ». ✯

C'est par une telle élaboration qu'un modèle mathématique est « **abstrait du réel** ». Abstrait à travers les perceptions, les expériences, les modèles antérieurs.

Le physicien, évidemment, doit savoir remonter à l'origine de son abstraction ; son modèle achevé comportera à la fois *une théorie et un mode d'emploi* ; mode d'emploi sans lequel le modèle serait inutilisable.

Si les prédictions du modèle concordent avec les observations, cela lui conférera une certaine valeur de vérité. Mais cette vérité ne deviendra assurée que lorsque beaucoup de telles concordances auront été observées ; alors qu'une seule discordance bien établie suffira à montrer la « fausseté » du modèle.

C'est ça, la ***méthode inductive*** ([1]).

---

1 Elle est déjà décrite par Platon (République, 380 Av. J. C.) : "…l'esprit, se servant comme d'images des objets qu'il avait déjà saisis, est forcé de rechercher des hypothèses d'où suive une marche qui la mène, non au principe, mais à la conclusion "

et par Huygens (Traité de la Lumière, 1690) : "…alors que les géomètres prouvent leurs propositions par des principes certains et incontestables, ici les principes se vérifient par les conclusions qu'on en tire ; la nature des choses ne souffrant pas que cela se fasse autrement. Il est possible toutefois d'y arriver à un degré de vraisemblance qui bien souvent ne cède guère à une évidence entière ; à savoir lorsque les choses qu'on a démontrées par ces principes supposés se rapportent parfaitement aux phénomènes que l'expérience a fait remarquer ; surtout quand il y en a grand nombre ; et principalement quand on prévoit des phénomènes nouveaux qui doivent suivre des hypothèses qu'on emploie, et qu'en cela l'effet répond à notre attente. "

Voilà pourquoi personne n'ose affirmer qu'un modèle soit " absolument vrai " ; on peut seulement constater que tel modèle colle bien à la réalité dans telles conditions. C'est le cas par exemple des modèles de milieux continus qui ont été élaborés au XIX$^{\text{ème}}$ siècle par Cauchy, Lamé, et bien d'autres ensuite. Modèles qui continuent d'être perfectionnés — par exemple en vue d'applications géophysiques, ou pour décrire convenablement les innombrables matériaux dont dispose aujourd'hui la technique.

Nouveaux modèles, donc, auxquels on ne peut accéder qu'avec humilité. Finies les certitudes ; finies les lois éternelles… Cette humilité aura sa récompense : pour construire un nouveau modèle, on a le droit de commencer par tout casser ; tout pourra se reconstruire ensuite par un acte créateur libre.

Acte libre, mais dont la valeur ne résulte que de la soumission à d'innombrables contraintes : le modèle doit être cohérent ; ses règles d'application à la réalité doivent être formulées sans ambiguïté ; elles doivent coller à des expériences faisables ([1]).
Ce travail du théoricien ressemble à celui d'un sculpteur qui veut créer une statue « ressemblante », et qui a choisi pour cela le matériau le plus dur et le plus difficile à travailler. Son œuvre doit d'abord exister, être solide ; elle doit pouvoir être montrée ; elle doit être ressemblante, puisque tel a été le choix du sculpteur ; enfin il est bon qu'elle semble belle à ceux qui la regarderont.

Or on fait bien de la sculpture non figurative ; le théoricien a-t-il lui aussi ses « modèles non figuratifs » ? Des modèles qui respectent les règles de cohérence, qui ont leur propre beauté, mais que l'auteur oublie — volontairement ou non — de comparer à une réalité matérielle ?

*Oui, bien sûr. Il s'agit des « **mathématiques pures** ».*

À quoi bonnes, des mathématiques « pures » ?

À quoi est bonne la musique ?

Les mathématiques pures sont art pour l'art ; elles sont jeu ; elles sont apprentissage, plaisir, passion. Passion partagée. Il est souvent arrivé que des mathématiques ainsi créées dans toute leur pureté ludique et artistique aient été utilisées ultérieurement comme modèles d'objets concrets.

Les petits chats jouent — et ensuite ils attrapent les souris.

Revenons aux modèles « figuratifs » de la physique. Un modèle nouveau étant élaboré (structure mathématique accompagnée de règles d'application à la réalité), il reste plusieurs choses à préciser :

- délimiter son domaine de validité ;
- comprendre comment le nouveau modèle et les modèles anciens ont pu donner chacun une description satisfaisante d'un même objet matériel ;
- découvrir aussi pourquoi nous, *sujets*, avons successivement choisi l'ancien et le nouveau modèle ; ce qui fait apparaître une certaine *subjectivité* des sciences « exactes ».

[1] À propos des modèles inductifs, on emploie parfois une expression de Karl Popper, mal traduite en français : "modèles falsifiables". Ce sont ceux dont le mode d'emploi n'est pas ambigu. Les autres ne courent pas le risque d'être contredits par l'expérience, puisqu'ils n'impliquent aucune expérience. Même pas faux, ils encombrent les publications scientifiques de leur vacuité.

Certains modèles ont été élaborés pour répondre à des problèmes techniques précis. Moins compréhensible est l'apparition de modèles fort étudiés avant qu'on leur ait découvert aucune corrélation avec le réel (*trous noirs, théorie de l'inflation, supercordes,* etc.), avec pourtant une ambition exprimée qui n'est pas celle des mathématiques pures.

Espoir d'une divine surprise, comme cela se produit parfois.

Oui, mais aussi sociologie des milieux scientifiques : le système des thèses et des patrons, le mécanisme de sélection des articles, tout cela favorise les sujets « *à la mode* ». Du moment que la mode a été lancée par un grand couturier de la science, tout travail sur ce sujet sera publié facilement — et d'autant plus facilement qu'il se réduira à quelques variations sur des opinions récemment publiées : un chercheur soucieux de sa carrière a tout intérêt à suivre la mode plutôt qu'à la questionner.

Quand elle est vide, la mode finit par passer. Bilan : d'innombrables travaux publiés d'un côté ; de l'autre, une seule connaissance nouvelle : c'est qu'il s'agissait d'une fausse piste.

modèles modernes, antiques et contemporains

Il ne faut pas oublier que la physique qui était « classique » à la fin du XIX^{ème} siècle était issue elle aussi d'une période de création orageuse : aux « temps modernes », de nouveaux modèles avaient supplanté les modèles antiques tels que la *Physique* d'Aristote.

La physique mathématique la plus classique, telle qu'on peut la lire par exemple dans les *" Principia "* de Newton, a été un modèle révolutionnaire ; mais le temps faisant son œuvre, cette révolution est devenue scolastique. On observe une certaine alternance, reproduisant au bout de quelques cycles un statut analogue de la connaissance. Ainsi des *atomes.* Comparons :

- R. P. Feynman ([1]): " Si un cataclysme détruisait toute la connaissance scientifique, et qu'un seul message soit transmis aux générations futures, comment pourrait-il contenir le plus d'information en le moins de mots ? Ce serait à mon avis :

toutes choses sont faites d'atomes,
petites particules qui sont en mouvement perpétuel…

…ces mots contiennent une quantité énorme d'information sur le monde, si seulement on met en œuvre un peu d'imagination et de pensée ".

- Lucrèce ([2]) : " Aucun repos n'est accordé aux atomes à travers les profondeurs du vide "
- Démocrite ([3]): " Nous disons chaud, nous disons froid, nous disons doux, nous disons amer, nous disons couleur, mais il n'existe en réalité que les atomes et le vide. "

1 Cours de Physique, Caltech, 1965.

2 de Rerum Natura (premier siècle avant JC).

3 Fragment de Démocrite (V^{ème} siècle avant J. C.), transmis par Sextus Empiricus (II^{ème} siècle après J. C.).

SYMÉTRIE, PERFECTION ET HARMONIE

cinq éléments

Comparons de même la théorie pythagoricienne des *Éléments*, décrite par Platon dans Le Timée (IV^{ème} siècle avant JC), avec la théorie contemporaine des " *particules élémentaires* ».

Chez Platon, les *quatre éléments* — terre, feu, air, eau —, constitutifs de toute matière, sont associés à des polyèdres réguliers ([1]) : cube, tétraèdre, octaèdre, icosaèdre (possédant respectivement 8 , 4 , 6 et 12 sommets).

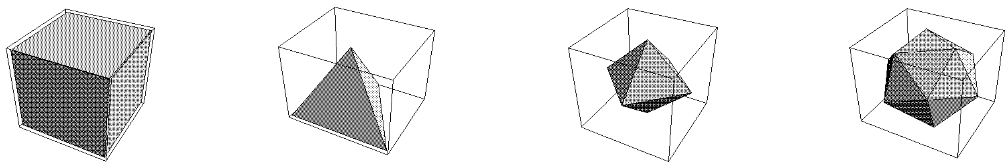

Figure 5A. Terre, feu, air et eau selon le modèle grec

La découverte d'un cinquième polyèdre régulier (le dodécaèdre, à 20 sommets, fig. 5B) suggère l'existence d'une *cinquième espèce* de matière qu'on place dans le ciel, à tout hasard, et qu'on appelle *quintessence.* ✯

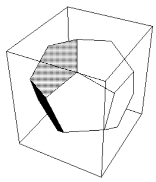

Figure 5B. Quintessence, la vraie

Pour ses écrits subversifs, François Rabelais (1490-1553) avait choisi le pseudonyme : *"Alcofribas Nasier, abstracteur de quintessence"*. Formé en Sorbonne, il savait ce qu'abstraction veut dire…

Dans les théories admises aujourd'hui, les *particules élémentaires* (quarks, baryons, leptons, etc.), constitutives de toute matière, sont regroupées en *multiplets* (ils ont 3 , 8 , 24 … éléments). En plus des particules déjà observées, les Alcofribas contemporains en imaginent d'autres — et trouvent parfois leur quintessence. Mais s'ils n'arrivent pas à les découvrir, ils les placent à tout hasard dans le ciel ([2]).

Un morceau de bois, est-il constitué avec un quart de Terre, un quart d'Air, un quart d'Eau, un quart de Feu, et un zeste de Quintessence ? Ou bien avec 99.94 % de Baryons, 0.05 % de Leptons, et un peu de Photons ?

---

1 Qu'est-ce qu'un polyèdre ? Une figure limitée par plusieurs faces planes. Quand dit-on qu'un polyèdre est régulier ? Nous allons examiner cette question en détail…

2 les « monopôles magnétiques » par exemple ; on a supposé qu'ils existaient ou qu'ils auraient existé quelque part dans les régions lointaines de l'univers. La mode étant passée, on a ensuite cherché les " wimps "…

la règle des règles

Alchimistes ou chimistes, polyèdres ou multiplets, ce que nous cherchons au cœur de la *matière*, ce sont des éléments doués d'une certaine qualité *immatérielle*. Un nom pour cette qualité ?

régularité.

Réguliers, ces polyèdres ou ces multiplets. Mais qu'est-ce que ça veut dire au juste ?

Régulier, c'est évidemment *conforme à une règle*. Mais quel genre de règle ? *Existerait-il une règle universelle concernant la nature ? Mais oui…* Et voici ce que nous allons découvrir :

régularité = symétrie
régularité = géométrie
régularité = groupe.

- La symétrie, tout le monde pense en avoir une idée — dans divers domaines où on la reconnaît ; pas seulement dans les sciences dures, mais aussi dans la structure des êtres vivants (animaux, plantes, virus), dans les arts (symétrie des décorations de l'Alhambra de Grenade et des coupoles des mosquées d'Ispahan ; symétrie musicale, comme dans les fugues miroir de Bach).
- La géométrie, la plupart du temps, n'évoque que quelques activités à moitié oubliées — et ennuyeuses — que l'on a dû subir ; le fameux « triangle ABC » par exemple.
- Mais un *groupe,* ce sera un concept nouveau ; *le groupe sera l'essence de la régularité.*

Un carré, c'est un polygone. Examinons-le : il est facile d'y détecter un certain nombre de *symétries* — au sens courant du terme. Par exemple on trouve tout de suite quatre « axes de symétrie », et aussi une symétrie par rapport au centre (fig. 6).

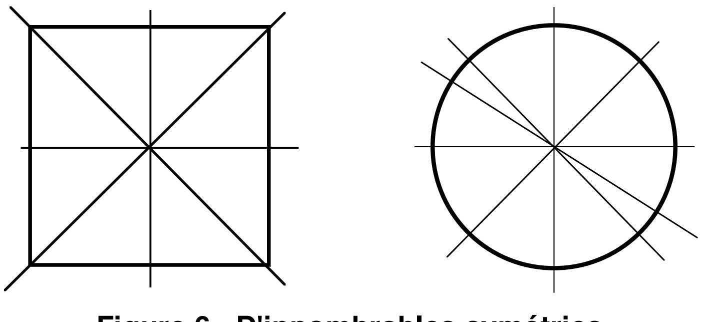

Figure 6. D'innombrables symétries

Dans le cas du cercle, toutes ces symétries se retrouvent — et d'autres encore : toutes les droites passant par le centre sont des axes de symétries. Il y a donc *plus de symétries* dans le cercle que dans le carré. Plus de régularité, si l'on veut.

Dans l'antiquité, certaines figures étaient qualifiées de « *parfaites* » ; ce sont justement celles qui apparaissent comme régulières, qui possèdent beaucoup de symétries, comme les polygones et les polyèdres réguliers ; les plus parfaites étaient les plus symétriques, comme le cercle dans le plan, la sphère dans l'espace.

La théorie pythagoricienne recherchait sous l'imperfection apparente de la matière une perfection cachée, celle des polyèdres représentant les Éléments. Et puisque les polyèdres étaient accessibles à la pensée pure, la matière pouvait le devenir aussi :

nouveaux pouvoirs à conquérir…

Même stratégie quand Aristote (IVème siècle avant JC) explique le mouvement imparfait des planètes par une *composition de mouvements réguliers sur des cercles* — mouvements qui seraient doués d'une certaine perfection. Cette composition mathématique est censée réalisée dans le ciel par un *assemblage de sphères* transparentes, articulées les unes sur les autres (56 sphères au total, dit-on). En particulier toutes les étoiles sont piquées sur une seule sphère solide ([1]). «*Solide* » = « *Firmus* »; d'où le nom de cette sphère: ***firmament.***

En grec, « assemblage » pouvait se dire « ***harmonie*** » ; c'est pourquoi cette théorie s'est appelée

Harmonie des sphères.

L'ambition du système pythagoricien, qui voulait embrasser dans un même mouvement de pensée l'assemblage des astres comme celui des sons, explique le sens que nous donnons aujourd'hui au mot « harmonie ».

Devant le firmament, il y a exactement 7 objets mobiles que nous pouvons voir : la Lune, Mars, Mercure, Jupiter, Vénus, Saturne et le Soleil ; pensons aux 7 jours de la semaine : Lune-Di, Mars-Di, … Sun-Day ([2]) . Et aux 7 jours de la Création.

De même la gamme pythagoricienne, respectueuse du Ciel, devait contenir 7 notes — et nous ne l'avons pas récusée

Qui a vu 7 couleurs dans un arc-en-ciel ? pourtant on répète qu'il y en a 7 ([3]). Vive le nombre 7 ! ([4]).

L'harmonie des sphères, élaborée par Eudoxe au IVème siècle avant JC, transmise par Aristote, a été perfectionnée par Hipparque (IIème siècle avant JC) ; les calculs d'Hipparque nous ont été transmis par l'œuvre de Ptolémée (IIème siècle après JC) : « Harmoniques », « Composition Mathématique », qui nous est parvenue sous le nom arabo-grec "*Almageste* " (« le plus grand »).

Harmonie fort efficace : elle permet d'obtenir des tables journalières (éphémérides) qui prédisent la position dans le ciel de la Lune, du Soleil et des planètes avec une précision de l'ordre du diamètre apparent de la Lune.

---

1 Il fallut attendre quinze siècles pour qu'on commence à admettre que ces étoiles étaient les sœurs du Soleil.

2 Ce n'est que vers 1520 que fut découverte la 8ème planète visible à l'œil nu : la Terre (Nicolas Copernic). Mais le nombre 7 fut sauvegardé en rétrogradant la Lune au rang de « satellite de la Terre ».

3 « Violet-Indigo-Bleu-Vert-Jaune-Orangé-Rouge", dit une comptine classique. Mais cet indigo, importé des Indes, il semble bien qu'on ne l'a fourré là que pour faire le compte.

4 Et pourquoi pas 3 ou 666 ? Attention à ne pas passer de la respectable observation du ciel au délire de la « numérologie ».

Ce calcul a été pratiqué pendant près de deux mille ans. Copernic, le « *second Ptolémée* », perfectionnait encore ce système au XVI$^{\text{ème}}$ siècle — en changeant le centre de certaines sphères ; il a fallu attendre 1618 pour s'en évader définitivement grâce au système de Johannes Kepler. Complètement autonome, ce nouveau système atteignait une précision égale à ce que notre œil peut discerner ([1]).

Les éphémérides de chaque planète se calculent à partir de quelques nombres, qu'on appelle ses *éléments*. Éléments qui figurent dans chaque traité, aussi bien dans celui de Kepler que dans celui de Ptolémée.

Que ce serait satisfaisant si on n'avait pas à relire les traités pour retrouver ces éléments, si on pouvait aussi les déterminer par la pensée pure ! Le vertige pythagoricien resurgit.

Kepler espérait caractériser chaque planète par un polyèdre. Les polyèdres ne marchant pas, on a inventé la « loi de Titius-Bode ». Et la quête continue… ([2]).

Abandonné provisoirement par les astronomes, le principe de l'harmonie des sphères n'a pas pour autant disparu de la science : la représentation d'un mouvement arbitraire par une composition de mouvements circulaires réguliers s'appelle aujourd'hui *analyse harmonique* ([3]).

Cette branche des mathématiques est fondamentale dans diverses techniques : acoustique (« sons harmoniques »), optique, médecine : c'est un ordinateur utilisant l'analyse harmonique qui produit les images de quelques instruments médicaux récents (scanner).

Et la solution du problème de la malle et des lingots, la mystérieuse formule écrite par votre ami mathématicien ([4]), c'est encore de l'analyse harmonique.

1 Une « minute d'angle » ; distinguer une telle minute, c'est distinguer la tête et l'abdomen d'une petite fourmi vue à une dizaine de mètres.

2 Nous y reviendrons au chapitre V.

3 Elle se continue par « *l'analyse harmonique non commutative* », branche importante des mathématiques. Son point de départ est indiqué dans la clé 10.

4 Fig. 4, p. 10.

Il

où ?