LES RACINES DE L'ESPACE

promenade dans le verre

Un matériau comme l'eau claire ou le verre, on dit souvent qu'il est *homogène*. Qu'est-ce que ça signifie ? qu'il a « partout les mêmes propriétés ». Mêmes propriétés en deux points **A** et **B** , quels qu'ils soient.

Rien de compromettant si les points **A** et **B** sont les mêmes ; cela ne devient significatif que si ces deux points sont différents.

Mais quand **B** n'est pas **A** , la matière en **B** n'est pas la matière en **A** ; qu'est-ce qui nous permettra de vérifier que ces deux matières *différentes* ont *les mêmes* propriétés ?

Il faut y aller voir.

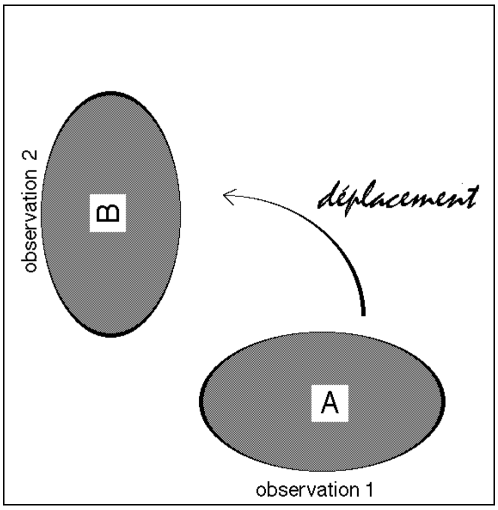


Figure 7. Déplacements

Les observations que nous avons faites en **A** , déplaçons-les en **B** ; alors notre savoir-faire d'observateurs nous permettra de comparer notre observation du matériau faite en **A** avec notre observation faite en **B**.

Attention ! pour déplacer ses observations, le physicien doit déplacer ses instruments. Les déplacer de **A** en **B**. Et si c'était le milieu à observer qu'il déplaçait de **B** en **A**, en laissant ses instruments immobiles ? ça donnerait le même résultat ; vous en êtes sûrement persuadé(e). Votre pratique du déplacement de la matière vous a déjà enseigné quelques règles universelles.

le vide hypocrite

Déplaçons d'abord le plus simple des « matériaux » : *l'espace vide*.

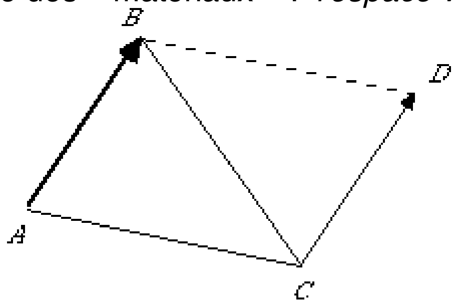


Figure 8. Déplacement parallèle

Deux points A et B (fig. 8) suffisent à définir une certaine opération qui « déplace » l'espace ; on l'appelle « translation » (transfert) ou « vecteur » (véhicule). On l'écrit avec une petite flèche: $\overrightarrow{AB}$. La translation $\overrightarrow{AB}$ va envoyer A sur B.

Mais l'opération $\overrightarrow{AB}$, d'un seul coup, va déplacer tous les points de l'espace !

Où déplacera-t-elle un autre point C ? au point D, dessiné sur la figure ([1]).

Ces translations ne sont pas les seuls déplacements « naturels » : les *Éléments* d'Euclide (IIIème siècle avant JC) nous enseignent l'art de combiner les translations avec les *rotations* de l'espace sur lui-même.

Nous savons bien qu'Euclide, évoquant un espace vide abstrait, se donnait la permission d'y déplacer aussi des instruments matériels, comme les compas :

son vide était plein de la possibilité d'y déplacer des objets.

Cette genèse de la géométrie par des opérations évoque le comportement des jeunes enfants qui acquièrent le sens de l'espace en remuant des objets : le jeu prépare à la connaissance.

Peut-être êtes-vous comme cet enfant perspicace qui refusait obstinément de dire « A » — ayant bien deviné qu'on lui demanderait aussitôt de dire « Bé » : nommer et abstraire, puis nommer encore, où est-ce que ça peut mener ?

Nous allons bien voir. Ayant nommé les « points », puis les « déplacements », opérations sur les points, nous n'échapperons pas au niveau suivant : les *opérations sur les déplacements.*

---

1 ABDC est un parallélogramme (fig. 8) : CD est parallèle à AB, et aussi BD à AC. Voilà donc à quoi servent les parallélogrammes !

oublier pour créer

Un mathématicien que ses amis appellent LE BARON vous entraîne dans cette voie. Il va falloir faire un effort ; mais la récompense spirituelle est assurée.

Vous avez peut-être oublié votre algèbre, mais vous vous souvenez que ça se fait en *nommant tout avec des lettres…*

Allons-y. *Nommons* un point par la lettre x ; nommons g et h deux déplacements.

Suivant l'usage, le point x déplacé par g, ça s'écrit :

$$g(x) \quad (1)$$

Ce point $g(x)$, nommons-le à son tour, par exemple avec la lettre y. Alors nous avons une « *équation* »:

$$y = g(x)$$

qui signifie que le point nommé y est le même que le point nommé $g(x)$.

On peut recommencer, déplacer y par h, ce qui donne le point :

$$z = h(y) .$$

Recopions, mais en écrivant $g(x)$ au lieu de y, puisque c'est le même point :

$$z = h(g(x))$$

Cette écriture :

$$z = h(g(x))$$

nous permet d'*oublier* le point intermédiaire y, puisqu'il n'est plus écrit. Et qu'est-ce qui fait passer de x à z ? un nouveau déplacement !

Ce déplacement que nous venons de créer par l'écriture et la pensée, nommons-le

$$\boldsymbol{h \circ g} \quad (2)$$

ça fait une formule facile à retenir, un simple mouvement de parenthèses :

$$\boldsymbol{(h \circ g)\,(x) = h(g(x))}$$

Typographie créatrice ! Avec deux déplacements $\boldsymbol{h}$ et $\boldsymbol{g}$, nous avons construit $\boldsymbol{h \circ g}$, qu'on appelle *composé* de $\boldsymbol{h}$ et de $\boldsymbol{g}$, et qui est *encore un* déplacement.

Voilà une nouvelle opération qui concerne les déplacements, mais plus les points ! "

la loi des groupes

ÉVARISTE est un poète. Pour lui, la façon de déplacer vaut mieux que ce que l'on déplace.

1 Lire « gé de iks »

2 Lire « *hach rond gé* ».

Il combine les déplacements entre eux, en marmonnant des mots magiques : « *associatif* », « *neutre* », « *réciproque* »… il note ces mots sur son carnet.
Il ne veut plus savoir qu'il existait un niveau **A** (figure 9). Il l'a définitivement oublié, il a sauté au niveau supérieur.

Nous aussi, accompagnons Évariste, escaladons (à partir du bas) l'échelle de l'abstraction :

E *géométries*

ACTIONS

Di *choix* ↗

MORPHISMES

Ci *opérations* ↗

GROUPES

Bi *oublis* ↗

DÉPLACEMENTS

A *opérations* ↗

POINTS

Figure 9. Grimper à l'échelle de l'abstraction

Plus poétique encore, voici qu'arrive SOPHUS.

Lui, il a oublié que les déplacements déplaçaient ! Ils deviennent de simples « éléments » ([1]), qu'il s'autorise à inventer librement, qu'il « compose » à sa guise — selon des règles qu'il s'est lui-même fixé.

Étonnante, cette liberté ! Vous lui posez franchement une question qui vous brûle les lèvres : " Vos éléments, ça peut se composer *n'importe comment* ? "

— SOPHUS " Mais oui… la preuve, c'est que *c'est vous qui allez inventer la loi* ; la loi qui dira comment composer deux éléments g et h , et quel élément gh ça produira.

Vous choisirez librement cette loi. Mais elle ne sera belle à mes yeux que si elle respecte certaines règles : celles qui sont écrites dans le petit carnet d' ÉVARISTE.

Alors je vous décernerai un certificat : officiellement, vous aurez inventé

un groupe ([2])

dès que votre loi respectera ces règles. Ces simples règles, rien de plus : aucun sous-entendu. Et pour nous mettre tout à fait d'accord, je vous les ai écrites, ces règles :

Ci !

---

1 Jean Piaget, parlant de la formation de l'intelligence chez les enfants, disait : " les opérations d'un niveau deviennent les objets du niveau suivant " . Sa construction de l'*épistémologie génétique* est parallèle à l'abstraction mathématique telle qu'elle s'est développée à la fin du XIXème siècle.

2 Attention ! Les mathématiciens ont la fâcheuse habitude de choisir des mots courants et vagues et de leur donner une nouvelle signification, très précise. Ainsi, « groupe » ou « ensemble », c'est quasiment la même chose dans la vie courante. Mais le groupe, pour un mathématicien, c'est bien autre chose qu'un ensemble : c'est la règle d'un jeu, rien de moins (cette règle est parfaitement précise) et rien de plus (cette règle s'applique strictement dans d'innombrables circonstances).

Bizarre, cette piété intellectuelle. Vous décidez de le prendre au mot :

— Eh bien voici des éléments *h*, *g*, … que je vous propose : ce seront *les nombres.* "

— SOPHUS : D'accord. Et quelle loi me proposez-vous pour composer les nombres entre eux ? "

— Vous voudriez bien que *hg* soit *le produit* des nombres *h* et *g* ? Eh bien non, rien que pour vous contrarier, je décide que ce sera *leur somme* ! "

— SOPHUS : vous pose une question perfide :
Bien sûr, vous n'avez pas oublié les nombres négatifs ? "

— Euh... Certainement pas. "

— Parfait : dans ces conditions, vous avez respecté les règles d'EVARISTE, les sept règles que j'ai écrites dans mon petit carnet… et vous avez donc inventé un groupe !
Et puisque votre loi c'est l'addition, nous l'appellerons « *groupe additif* », si vous le voulez bien. "

Alors non seulement il faut inventer une loi, il faut accepter le verdict d'ÉVARISTE le Dieu et de SOPHUS son Prophète, mais encore, si on a triomphé de ces embûches, il faut *nommer* le groupe. Drôle de jeu !
Mais après tout, à la télévision, on voit des jeux encore plus bêtes ; on peut toujours essayer celui-là. Pourtant ça a l'air difficile, le coup de chance que vous avez eu tout à l'heure avec l'addition n'a pas l'air de se reproduire souvent.

Brusquement, cependant, il vous vient une idée radicalement simple : vous prendrez comme éléments les déplacements, et comme loi *la loi même du BARON* ! (p. 23).

— Ah oui, dit SOPHUS avec un petit sourire, évidemment vous avez raison. Nous avons un vrai groupe, il ne nous reste plus qu'à le nommer. "
Et après quelques instants de concertation, vous tombez d'accord : il s'appellera :

groupe d'Euclide (1)

Depuis quelques instants, vous planez au niveau *Ci* (fig. 9). Vous passez en revue des quantités de *groupes* (SOPHUS a accepté de vous aider), celui d'Euclide n'est plus que l'un d'entre eux.

à l'action !

Enfin SOPHUS est reparti travailler. Peut-être un peu de repos pour vous ?
Mais non, quelqu'un d'autre vous interpelle. Sans savoir exactement pourquoi, vous avez une petite idée du discours qu'il va vous tenir. Eh oui ! C'est un réformateur ! Il s'appelle FELIX, et il fait sa profession de foi :

— Rassurez-vous, je ne retranche rien au travail de mes collègues, mais je pense que leur intégrisme doit être tempéré. Et voici comment.
Pour commencer, je vous laisse inventer un groupe, celui que vous voulez. "

— Bien, mon choix est fait. Ses *éléments*, ce sont *h*, *g* …"

1 C'est ce groupe-là que les chimpanzés maîtrisent si bien !

— FELIX: Parfait, parfait. Mais ***à quoi ça sert, un groupe ?***

Eh bien voilà …

Voici ce que je vous propose : inventez aussi des objets x, y, z…, et ensuite une

action du groupe sur ces objets ;

chaque fois que g sera un élément du groupe et que x sera un objet, vous décidez librement du choix de l'objet qu'on écrira g(x). "

Librement, mais quand même en respectant mon petit carnet. "

Et il sort de sa poche son petit carnet à lui ; vous vous y attendiez.

— FELIX continue : " Et quand vous aurez fait ce choix, en respectant mes règles,

Votre groupe sera devenu une ***géométrie*** *!*

Pas moins ! " ([1])

Cette géométrie, elle se jouera sur deux niveaux à la fois : d'un côté le groupe et ses éléments ; de l'autre, les objets qui constitueront un *espace*. *Espace géométrique*, dirons-nous. Et ce qui les reliera, c'est *l'action* grâce à laquelle chaque élément de ce groupe déplacera chaque objet de cet espace ; le déplacera quelque part dans cet espace-là. "

Encore un peu plus farfelu, ce jeu. Tout à l'heure, par politesse, vous avez jeté un coup d'œil sur ce carnet, et vous y avez aperçu la formule :

$$[hg](x) = h(g(x))$$

On ne vous la fait pas, vous l'avez reconnue, et vous lancez à tout hasard :

— Eh bien je prends comme groupe le *groupe d'Euclide*, comme objets *les points* ; et l'action, ce sera tout simplement le déplacement des points… "

— FELIX est ravi : Oh oui, parfait, vous venez d'inventer la **géométrie euclidienne** *!* "

Vous n'avez pas vraiment l'impression d'avoir inventé quoi que ce soit, mais simplement d'avoir aidé ces messieurs à accoucher de leurs propres fantasmes. FELIX semble avoir atteint le niveau supérieur E ; mais vous, vous avez l'impression d'être retombé(e) au niveau A . Et vous le lui dites.

— FELIX : Mais ne vous désolez pas comme ça ; au contraire, réjouissez-vous ! Voyez donc, nous pouvons jouer à la fois du E et du A . La diversité de ces niveaux, c'est celle des claviers d'un grand orgue ; songez à la richesse des variations que nous allons pouvoir exécuter en contrepoint.

Si vous connaissez déjà une géométrie — faite avec un espace et un groupe, et si vous décidez de changer de groupe, alors vous avez changé la géométrie de l'espace ([2]).

---

1 Felix Klein, " Programme d'Erlangen ", 1870. Voilà une première définition générale du mot « géométrie ».

2 Exemple : les mollusques ont inventé une nouvelle géométrie, comme le montre l'architecture de leurs coquilles (voir plus loin, *l'art surnaturel des escargots*, p. 37).

Mais vous pouvez au contraire *changer d'espace* en conservant le groupe : de nouveaux objets vont remplacer les points. Des objets plus riches et plus subtils vont apparaître, qui appartiendront cependant *à la même géométrie*. " ✯

Vous n'êtes pas entièrement convaincu(e) par ce discours :

— Voudriez-vous me faire le plaisir d'improviser une de ces variations ? "
— Écoutez donc. Le groupe, c'est toujours le groupe d'Euclide. Mais les objets, ce ne sont plus les points, ce sont les *triangles*. Et un triangle $A\,B\,C$ déplacé par g , ça donne le triangle dont les sommets sont $g(A), g(B), g(C)$. C'est comme ça qu'Euclide lui-même appliquait sa géométrie *aux triangles.* "

FELIX a évidemment raison de dire qu'il s'agit toujours de la même géométrie ; mais le charme de cette variation triangulaire vous échappe encore un peu.

Soudain un vertige vous saisit : il existe maintenant un *espace des triangles.* Un *espace euclidien de tous les triangles*. Espace où nous ne pouvons pas pénétrer — puisque nous ne sommes pas faits de triangles — mais qui est à notre portée, puisque nous connaissons les règles qui permettent d'y jouer.

Triangles… vous êtes bien jolis, mais vous n'êtes pas les seuls : les droites, les sphères, ont aussi leur espace ; mieux, il existe un espace de toutes les figures.

Continuons : toutes les œuvres graphiques, toute la sculpture, tout cela constitue un seul espace. Le tableau que vous avez dans la tête, celui que vous pourriez peindre pour représenter ce champ de blé, ces montagnes, ces étoiles, c'est un seul objet dans l'espace des œuvres.

Tous les paysages du monde y sont embusqués, dans cet espace ; et il est euclidien, puisque les œuvres se laissent déplacer sans perdre leur valeur d'œuvre.

Mystérieusement, une question et sa réponse vous viennent ensemble à l'esprit :

Ce paysage que je contemple sur une toile, comment puis-je savoir que *c'est un paysage* ? Cela, c'est un champ de blé, parce que je peux imaginer que j'y suis couché, que je vois les tiges trembler au vent, que je cueille un épi.

La montagne ? au moins par la pensée, je touche de la main ses pierres froides, je frappe du pied son sol sonore.

Étoile brûlante que voilà, ma pensée te touche aussi, tu es à moi.

Si le Cosmos entier est mon paysage, c'est parce que la pensée m'y déplace.

Je *pourrais* être là ou là, et je *suis* là ; et en tous ces *là*-là je pourrais me laisser déplacer par le groupe d'Euclide. Un nouvel espace géométrique, donc, qui est fait de tout ce que je pourrais être :

cet espace, c'est moi.
Moi, espace, je partage la géométrie du Cosmos,

donc je suis.

INITIATION

l'apprenti sorcier

Après la métaphysique, la didactique.

Si on veut apprendre ce que sont les groupes, il faut choisir par où commencer. Par exemple l'un des niveaux A, Bé, Cé, Dé, E que nous venons de classer ([1]). Lequel ? Choix délicat : si l'on commence tout en bas, tout est clair et compréhensible, mais il faut revivre toute l'histoire des mathématiques — et ça prend quelque temps.

La *clé 1* qui vous est proposée (dans les pages jaunes) se place au niveau Cé, celui des groupes à la Sophus. On y trouve un énoncé de diverses règles — qui peuvent sembler bien arbitraires.

Mais c'est à prendre ou à laisser : les groupes, c'est toutes ces règles à la fois, ou rien.

On va peut-être vous proposer de l'apprendre par cœur, ce recueil de règles ! Qui donc pourrait aimer ça ? …sauf peut-être un savant fou ?

Mais souvenez-vous de l'Apprenti Sorcier : il a oublié une seule petite règle, et il court à la catastrophe jusqu'à la survenue de son Maître.

Ce n'est qu'en acquérant la maîtrise parfaite de ces règles strictes qu'on peut un jour apprécier la souplesse de leurs variantes. ✯

De même en musique : *Rubato* ou *Swing* ? réservés à ceux qui savent d'abord maintenir un tempo implacable. La grâce des variations naît de la liberté mesurée.

Heureusement, il n'est pas nécessaire de connaître le solfège pour aimer la musique…

Écoutons donc simplement la musique des groupes.

Il y a plus de deux siècles que les mathématiciens aiment les groupes, se délectent à en jouer. C'est le plus classique de leurs instruments, et il ne se démode pas. ✯

Mais on doit rendre justice aux mathématiciens : les groupes, ils ne les ont pas inventés pour leur plaisir solitaire. Ainsi la définition de Felix Klein est apparue juste au moment où la pratique des groupes permettait un progrès décisif dans la connaissance de la matière ([2]).

L'outil de pensée « groupe » a été forgé dans le feu de l'action ;

les mathématiciens ont su l'affûter convenablement.

1 Fig. 9 , p. 24.

2 La classification des groupes cristallographiques ; voir ci-dessous *le secret des cristaux*, p. 33.

l'origine des espèces

Parmi les primates, nous savons distinguer l'espèce humaine.

Ambiguïté de ce mot « ***espèce*** »:

- Votre espèce est déterminée par ***un ensemble qui vous possède*** :

  cet *ensemble*, c'est *« l'espèce humaine »*, constituée des individus qui possèdent cette qualité-là.

  « ***extension*** » de l'espèce, disent les grammairiens.

- Mais votre espèce, est aussi déterminée par ***une qualité que vous possédez*** :

  cette *qualité*, on peut l'appeler « *humanité* ».

  Selon les grammairiens ([1]), c'est la « ***compréhension de l'espèce*** ».

La géométrie va dire son mot dans ce débat.

Choisissez *un obje*t **x** dans un espace géométrique. Faites agir *tous les éléments du groupe* ([2]) sur ce seul objet. Vous obtiendrez ainsi une partie de l'espace ;
eh bien cette partie , nous dirons que c'est ***l'espèce*** de **x** .

Si nous en parlons *en extension*, nous dirons que cette espèce est ***la famille*** de **x** ; *en compréhension*, nous dirons **le type** de **x** .

Autrement dit, les objets qui sont *de même type* que **x** , ce sont ceux qui appartiennent à la *famille* de **x** .

Ils sont tous « *de même espèce* »; l'élément **x** que nous avions choisi initialement n'est plus qu'un « représentant » de la famille : il la détermine, mais elle ne le détermine pas.

Ainsi sont faites les espèces que nous rencontrons partout… en voici quelques exemples :

- *les points de l'espace euclidien* ? ils constituent une seule famille, ils sont tous *du type* « point ».
- *les couples de points* ? ils se répartissent en familles différentes. Le type d'un couple de points, c'est la ***distance*** entre ces deux points.

Voici quelques précieux types que nous rencontrerons au cours de ce livre :

les durées, les particules élémentaires, les « choses » …

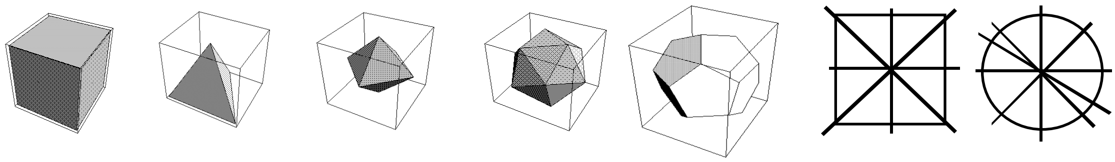
---

1 Quels « grammairiens » ? Ceux qui ont tenté d'élaborer une « grammaire universelle ». Par exemple Arnaud et Lancelot, auteurs de la *Grammaire de Port Royal*, « Grammaire générale et raisonnée, contenant les fondements de l'art de parler, expliquant d'une manière claire et naturelle les raisons de ce qui est commun à toutes les langues et les principales différences qui s'y rencontrent »,

2 Le groupe qui produit la géométrie de l'espace en agissant sur lui ; voir p. 26.

la règle des règles

Dans le premier chapitre , nous avions contemplé des figures symétriques:



Que sont leurs symétries ? des *déplacements,* qui font coïncider la figure avec elle-même. Regardez bien ces figures ; par la pensée, faites tourner un carré autour de sa diagonale et voyez-le coïncider avec lui-même au bout d'un demi-tour seulement ([1]).

Essayons avec une autre figure, par exemple la courbe spatiale qu'on appelle *hélice circulaire* (fig. 10). Courbe illimitée, dont nous ne pouvons dessiner qu'une partie :

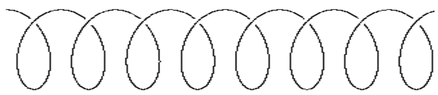


Figure 10. La vis a une âme

Quelles sont ses symétries ? Il faut rechercher tous les déplacements qui agissent sur l'hélice sans la modifier. Eh bien il y en a une infinité ; pensez à *visser* la courbe sur elle-même.

Symétries nouvelles, auxquelles on n'aurait peut-être pas pensé si on n'avait pas analysé la notion de symétrie en termes de déplacements. Symétries grâce auxquelles l'hélice est une courbe régulière — au même titre que le cercle ou que la droite.

Toutes les symétries de l'hélice, *ça constitue un groupe* ; et ce groupe, c'est lui qui assure la régularité de l'hélice.

Règle générale : pour chaque objet géométrique, les éléments du groupe qui agissent sur lui sans le modifier s'appelleront ses «***symétries*** » ; et toutes ces symétries, ça constituera *un groupe*, la « ***régularité*** » de l'objet. ✯

Espèces, régularités ; la géométrie fait acquérir à ces notions intuitives la rigueur qui en fera des briques solides pour reconstruire le monde dans nos têtes ([2]).

Derrière chaque espèce, derrière chaque régularité, se cache un groupe qui agit !

---

1 Ça n'est plus vrai pour un rectangle, moins symétrique que le carré.

2 Voir la *clé* 2,

DOMICILE DE LA MATIÈRE

de la géométrie avant toute chose

Pour connaître un objet, les enfants commencent par jouer avec lui. Quand ils savent le retourner de tous les côtés, il commence à leur appartenir : *le jouet devient un attribut du jeu.*

Jouons avec la matière. Les physiciens ne la connaissent pas complètement : la physique n'est pas achevée. Alors, humblement, comme des enfants, prenons pour *nature des choses* la possibilité de jouer avec elles.
Peu à peu, nous découvrons ainsi, à tâtons, la première règle de ce jeu :

le groupe d'Euclide déplace
les points et les figures de l'espace,
mais aussi toutes les choses...

Et ce déplacement, c'est exactement une *action de groupe,* au sens précis de Félix Klein ([1]).

Ainsi *chaque chose* acquiert le statut d'*objet géométrique ;* c'est en partageant la géométrie de l'espace qu'elle s'enracine dans cet espace ([2]).

le paradoxe du physicien

La physique tire sa *légitimité* de la possibilité de reproduire les expériences ; comme nous l'avons vu au début de ce chapitre, ceci implique la possibilité de déplacer, soit l'objet de l'expérience, soit nos moyens d'observation. Dans les deux cas, de déplacer des choses. *Comment* les déplacer ? Nous venons de le constater, *par l'action d'un groupe.* Cette règle du jeu, c'est un *visa pour la physique* ([3]).

Examinons la situation suivante : une superbe expérience a lieu dans le LABORATOIRE DE

---

1 *à l'action !* pp. 25-26 et clé 2 . Une définition précise du groupe d'Euclide se trouve dans la clé 4.

2 Les objets mathématiques les plus directement utiles à la physique, à la construction de modèles, sont ceux qui appartiennent aussi à cette géométrie : « orientations », « torseurs », « champs » , « tenseurs » etc. Il suffit qu'on sache soumettre ces objets à l'action du groupe d'Euclide. Un point, c'est tout.

Chercher à les localiser davantage, à les dessiner, serait peine perdue : la géométrie va au-delà des possibilités du dessin ; souvent, ses images ne peuvent exister que dans notre tête.

3 Le passeport du physicien va recevoir de nouveaux visas, grâce à l'apparition de nouveaux groupes. Nous verrons comment aux chapitres III , IV et VI.

PHYSIQUE EXPÉRIMENTALE. Choisissons dans le groupe d'Euclide un déplacement qui devrait envoyer l'expérience un peu à côté, dans le jardin. Mais dans ce jardin, personne ne fait d'expérience…

Un déplacement d'une expérience réelle ne produit pas une expérience réelle — sauf coïncidence.

On s'en tire par l'argutie suivante : l'expérience serait possible dans le jardin, comme elle est possible dans le laboratoire. Autrement dit, le physicien va envisager deux classes de faits, le ***réel*** et le ***possible*** ([1]), et admettre les principes suivants :

- c'est sur le réel qu'on expérimente
- le réel fait partie du possible
- c'est sur le possible qu'agit le groupe d'Euclide.
- Véritables principes, ou sentences creuses ? Examinons-les de plus près. L'objet de la physique, ce sera le *possible* ; objet *universel* désormais, comme il se doit de tout objet de science

Plus de paradoxe pour la physique, mais *paradoxe pour le physicien* :

- Théoricien, il peut décrire une expérience ; mais sa théorie serait suspecte s'il lui fallait y dire *où* et *quand* l'expérience se fait ; il est condamné à ne disserter que *d'une infinité de possibles.*
- Expérimentateur, toutes les précisions assurant l'authenticité des faits qu'il décrit sont souhaitables ; sinon, c'est son expérience qui serait suspecte. Il est alors condamné à ne décrire que des faits *réels et uniques*.
- Tout acteur de la science doit ainsi incarner deux personnages ; c'est du dialogue de ces personnages que naît la science — et son pouvoir.

Double langage obligé, pour le physicien comme pour le comédien.

Maintenant que *les choses* sont des objets du groupe d'Euclide, chaque chose est munie d'une *régularité* : c'est un groupe, le groupe de toutes les *symétries* de cette chose-là.

Exemple: un *milieu homogène*, c'est un milieu M qui ne change pas quand on lui fait subir une translation *quelconque* t :

$$t(M) = M\,,$$

une chose M dont la *régularité* contient toutes les translations.

Belle définition ! Mais existe-t-il réellement un milieu homogène, en dehors du vide ? Pas sûr. Et d'ailleurs, ce vide, cet ensemble de points immatériels, existe-t-il vraiment ?

En tant qu'objet mathématique, oui, on peut le construire avec le groupe d'Euclide. Mais son rôle est devenu secondaire pour le physicien : il n'est plus l'objet de la géométrie, mais une annexe de cette géométrie.

Et d'ailleurs, ces points si petits qu'ils ne changent pas si on les fait tourner sur eux-mêmes, ont-ils jamais été l'objet d'une expérience ?

Au revoir et merci, chers petits points…

Ainsi la géométrie d'Euclide retrouve ses sources: c'est une physique des objets solides : règles, compas, équerres, diamants…

1 Ou « virtuel ». Mais ce virtuel-là est strictement limité par la physique elle-même.

le secret des cristaux

Occupons-nous maintenant de la régularité d'un objet réel — par exemple d'un *cristal*. Il va falloir idéaliser ; supposons le cristal sans défaut, traitons-le comme s'il était sans limites.

Mais attention ! si un cristal C est constitué d'un empilement régulier d'atomes ([1]), une translation t qui est une symétrie du cristal : $t(C) = C$, doit déplacer *chaque atome sur un atome identique*. Ces translations doivent respecter les « mailles » du réseau cristallin : ce ne sont donc pas *toutes* les translations ; lorsqu'on l'examine « de très près », le cristal *n'est pas homogène*.

Pour la même raison, il n'y a que certaines rotations qui soient des symétries de ce cristal : on dit qu'il n'est pas *isotrope* ([2]).

Voilà le chemin qui a permis de classer tous les groupes qui pourraient être la régularité d'un cristal ; on a ainsi découvert qu'ils se répartissent en 230 *types* (Fedorov, Schönflies, vers 1891) ; on les appelle

" *groupes cristallographiques* " .

Progrès décisif dans la connaissance scientifique.

L'expérience a vérifié que la *régularité* de chaque cristal rencontré dans la nature (ou produit artificiellement) appartient toujours à une (et une seule…) de ces 230 espèces classées a priori.

Voilà une *classification des types de cristaux*, complète et indépendante de toute idée préconçue. A comparer avec la classification des espèces végétales ou animales.

Cet effort de modélisation est d'autant plus remarquable qu'à l'époque « l'hypothèse atomique » n'était pas encore admise par tout le monde ; la cristallographie assujettie aux groupes devenait précisément l'un de ses tests.

Nous avons ainsi un exemple de modèle mathématique (celui des *groupes*) qui a la vertu de classer des objets réels (les cristaux que l'on pourra découvrir dans les mines les plus reculées, sur la Lune ou sur Mars) sans qu'il soit nécessaire pour autant de connaître leur structure intime, ni même leurs propriétés physiques.

Modèle ayant vocation à l'universalité.

La découverte de « modèles universels » est un progrès essentiel en physique, même *appliquée* : ainsi l'appartenance d'un cristal à tel ou tel type « abstrait » autorisera ou interdira un phénomène comme la *piézo-électricité* (Pierre Curie). La piézo-électricité produit une déformation du cristal sous l'action de l'électricité ; elle permet de faire vibrer le cristal.

---

1 L'idée que les propriétés mécaniques et optiques des cristaux (plans de clivage, biréfringence de la lumière) s'expliquent par leur constitution en empilement régulier d'atomes remonte au moins à 1660 (Christiaan Huygens, " Traité de la lumière ").

2 « Isotrope » = « pareil-tourner ». Il n'est pas toujours nécessaire de se placer à une échelle microscopique pour découvrir les rotations qui font partie de la régularité du cristal : il existe souvent des directions selon lesquelles le cristal se fend facilement (« plans de clivage »), et bien entendu chaque symétrie du cristal déplace chaque plan de clivage sur un plan de clivage.

Bien utile, cet effet : c'est la piézo-électricité du quartz qui donne leur précision à nos montres ; c'est avec elle qu'on fabrique les ultrasons qui permettent d'examiner les bébés dans le ventre de leur mère et de trouver les harengs dans l'océan.

La construction de tels modèles est l'une des ambitions les plus hautes de la physique mathématique ; l'utilisation des groupes permet ainsi d'accéder à une certaine universalité sans devoir attendre que la physique soit achevée.

les mystères de l'eau claire

Un liquide est constitué d'atomes qui se groupent et se meuvent de façon très compliquée ; spécialement *l'eau* ([1]). Rien d'analogue au cas du cristal, où les vibrations des atomes ne brisent pas l'ordonnance du réseau.
Mais si nous observons l'eau claire "de loin", à grande échelle, on peut négliger ces détails microscopiques : "macroscopiquement", l'eau possède toutes les régularités du groupe d'Euclide, elle apparaît *homogène et isotrope*.

Même régularité macroscopique pour les liquides figés tels que le verre ou les métaux usuels.

Pourtant nous avons négligé quelque chose d'essentiel : cette régularité-là exigerait un milieu répandu dans l'espace tout entier. Paradoxe donc, ni les morceaux de verre ni la mer ne sont illimités. Ils constituent *une partie seulement d'un objet régulier* : nous dirons qu'ils sont

quasi-réguliers.

Quasi-régulier, ce n'est pas une définition mathématique, cela concerne des objets dont nous sommes capables *d'imaginer* un prolongement régulier. Des objets qui évoquent une image mentale régulière ([2]). Exemple : une règle ou un fil tendu nous permet d'imaginer une "droite illimitée", objet qui n'existe que dans nos têtes. Une bonne vieille règle en bois évoque cette régularité abstraite. De même, quand nous avons appris à compter, nous avons pu imaginer un beau jour la suite illimitée des nombres entiers. Illimitée dans les deux sens, au besoin.

Regardez la figure 10 (p. 30), qui représente *en deux dimensions* une figure régulière *à trois dimensions* (l'hélice). Votre œil et votre cerveau savent reconstituer sa régularité spatiale. Observez ensuite la figure 10 bis (p.35). En vous plaçant à diverses distances de la feuille, vous pourrez y voir des motifs qui se reproduisent (alignements,

1 Un certain nombre de modèles de l'eau liquide ont été proposés, mais aucun ne semble définitivement acquis. Faute de modèle, l'expérience elle-même n'est pas significative : les expériences controversées du type « mémoire de l'eau » ne pourraient être interprétées clairement que si nous possédions un modèle de l'eau suffisamment précis.

2 Lisons Platon, dans *la République* : " Ils se servent de figures visibles et raisonnent sur ces figures, mais ils pensent à d'autres figures auxquelles celles-ci ressemblent. … Toutes ces figures qu'ils dessinent, qui portent des ombres et produisent des reflets dans l'eau, ils les emploient comme si elles étaient des ombres. Ombres d'objets que seule la pensée peut percevoir ".

rosaces…), mais qui ne se reproduisent pas exactement ([1]).

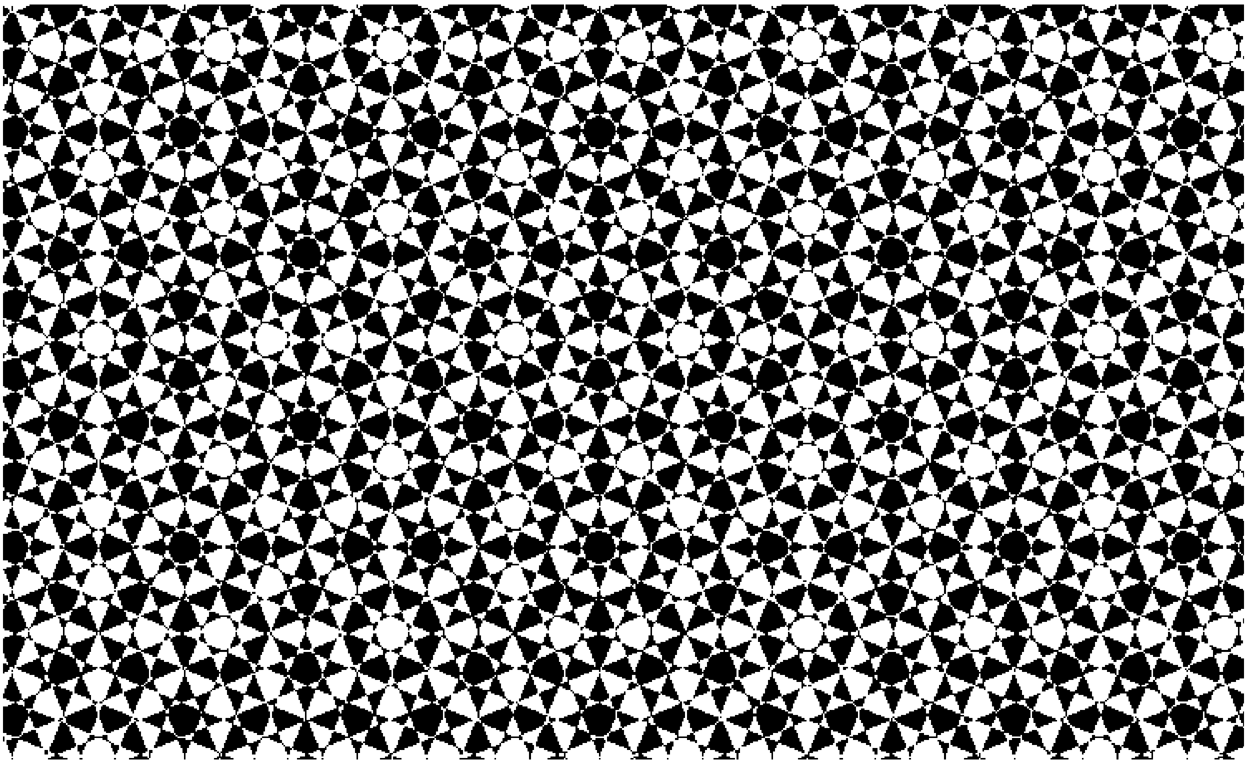


Figure 10 bis. Quasi – régularité

Cette figure serait-elle, comme la figure 10, une projection plane d'une structure tridimensionnelle régulière ? Ceux qui savent pratiquer l'auto-stéréoscopie pourront y observer des alignements dans l'espace plus réguliers, mais pas complètement. Une vraie régularité est cachée derrière, mais elle est un peu plus difficile à atteindre : c'est une section plane d'une figure régulière à quatre dimensions… ✯

1 Voici une recette pour construire et prolonger arbitrairement la figure 10 bis : prenez un papier quadrillé régulièrement, faites-en deux photocopies sur papier calque, et superposez-les. Faites ensuite tourner l'une de 45 degrés par rapport à l'autre : les régions qui apparaîtront alors, il suffira d'en noircir une sur deux en passant du noir au blanc chaque fois que l'on traverse une ligne appartenant à l'un des quadrillages. Si la figure obtenue ne peut pas être régulière, c'est parce que la longueur du côté d'un carré et celle de sa diagonale n'ont pas de multiple commun — comme l'avaient déjà démontré les pythagoriciens.

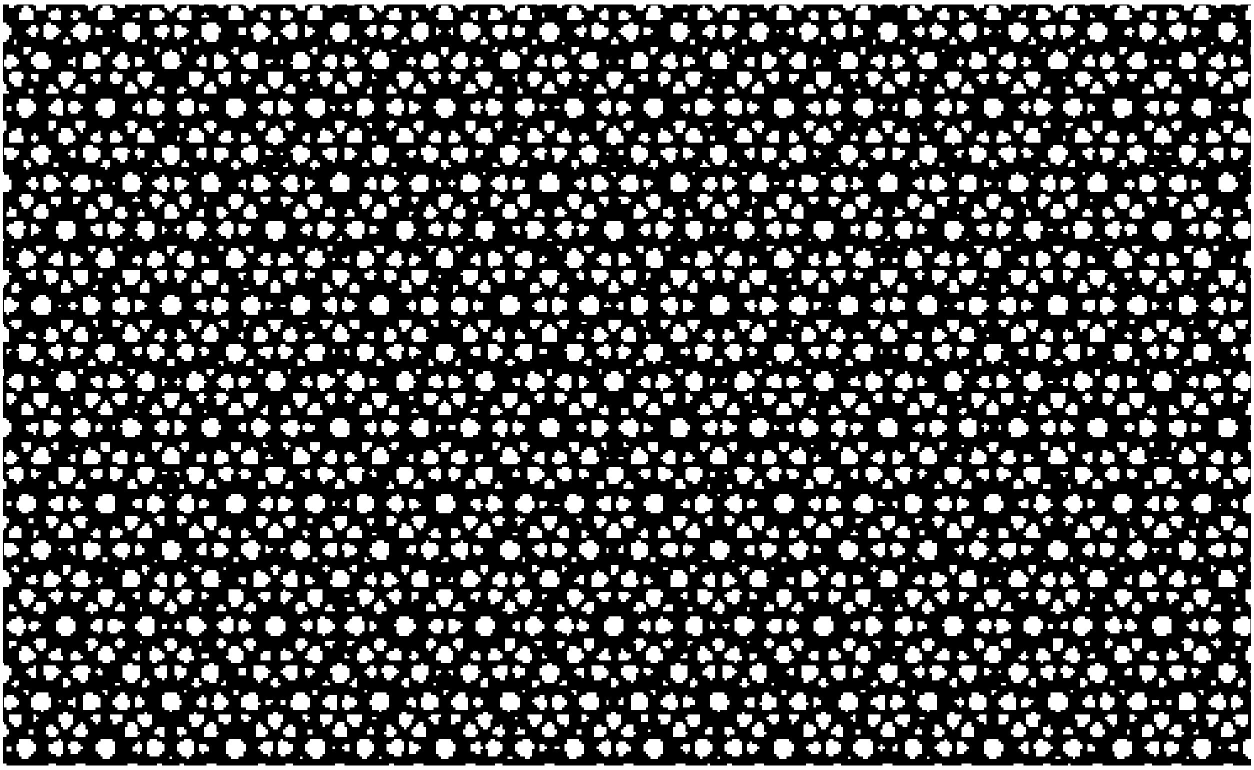


Figure 10 ter. Quasi-régularité d'un quasi-cristal

La figure 10 ter est une section plane d'une figure régulière *à cinq dimensions*.

Ce qui est remarquable, c'est qu'il existe un alliage d'aluminium et de manganèse (découvert en 1984) dont les microphotographies électroniques ressemblent terriblement à cette figure-là.

Question inéluctable : la structure microscopique *tridimensionnelle* de cet alliage est-elle régulière ? La réponse est *non*, parce qu'aucun des 230 groupes cristallographiques n'est compatible avec une telle photographie. Il s'agit donc d'un nouvel état de la matière, quasi-régulier, qui n'est pas un cristal ; on l'appelle

quasi-cristal.

LES ARTS NATURELS

Considérons un bloc solide, du verre ou du métal par exemple, dont la forme est irrégulière. Irrégulière, qu'est-ce que ça veut dire ? Que sa régularité est nulle… (1).

Cependant certaines formes sont douées d'une régularité exceptionnelle. Les polyèdres réguliers de Platon par exemple ; et aussi les cylindres, les sphères, à qui on

1 Cette régularité-là, c'est un groupe «nul» —c'est-à-dire un groupe qui possède un seul élément…

attribue la « symétrie de révolution », la « symétrie sphérique» (1). Et d'autres.

Formes intéressantes ; comment les fabrique-t-on ?

Ô merveille : certains matériaux ont l'obligeance de les faire apparaître, presque spontanément — grâce à leur régularité interne.

Voilà le secret de quelques arts naturels.

vertus de la vis

Pour matérialiser les *vissages* qui constituent la régularité de l'hélice circulaire (fig. 10), il suffit de forcer une tige dans un écrou déjà fileté, même approximativement ; en renouvelant alternativement vis et écrou, le filetage prend forme, la régularité s'affine par usure mutuelle.

Avec suffisamment de patience et de savoir-faire, on réalise des vis extrêmement fines et précises : celles qui constituent les « micromètres à vis », les « machines à diviser ». Avec ces machines, il suffira de *compter* les tours de vis pour *mesurer* les longueurs avec précision.

les lunettes de Spinoza

Le philosophe Baruch Spinoza (1632-1677) gagnait sa vie en « polissant des verres de lunettes » .

Comment faire apparaître une surface parfaitement sphérique sur un bloc de verre ? Vous l'avez deviné, par usure mutuelle sur un autre bloc de verre — un abrasif fin étant interposé.

Il ne faut pas polir n'importe comment : un bloc doit glisser sur l'autre en tournant « dans tous les sens » ; les mains de l'artisan agissent doucement selon le groupe qu'il s'agit de faire apparaître.

éloge de la soupière

Comment confectionner un vase de terre cuite ? Avant de le mettre au four, il faut pétrir la terre à la main, ou la mouler ; mais la plus belle poterie est « *faite au tour* ».

C'est le tour du potier, invention néolithique (2), qui déplace l'argile sous les mains adroites de l'artisan, et qui lui permet de créer ainsi la régularité du pot. De transférer au pot la régularité du tour.

Tour du potier ; tour à bois ; construction de roues ; tour du métallurgiste, ancêtre des machines-outils :

artifices industriels qui reposent sur des régularités naturelles.

l'art surnaturel des escargots

1 Attention ! Il n'y a pas que la sphère pour posséder la « symétrie sphérique »; pensons à un assemblage de sphères concentriques… La « symétrie sphérique », ce n'est pas une surface, ce n'est pas une figure, c'est une *espèce de régularité*.

2 Autre invention néolithique : la culture et la cuisson des céréales. Grave problème : la soupe a-t-elle précédé la soupière, ou la soupière la soupe ?

Les formes biologiques, elles aussi, ont des régularités diverses : symétries des feuilles et des fleurs, symétrie "paire" du corps humain, etc. Parmi ces formes régulières, celles de certains coquillages sont très fines et très remarquables. La figure 11 évoque certains de ces coquillages : un coquillage plat posé sur le papier, l'ombre noire d'un coquillage pointu.

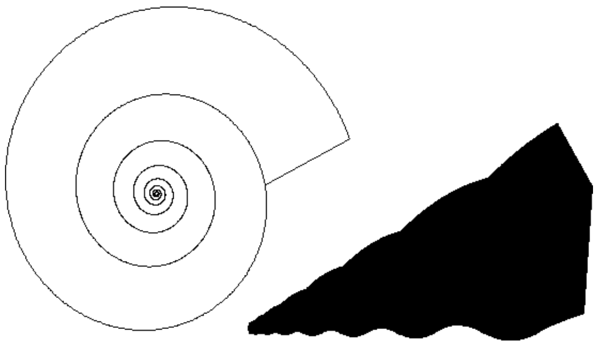


Figure 11. Pseudo-coquilles récoltées sur les plages de la géométrie

En fait, il s'agit de figures « mathématiques », elles ont été produites par un ordinateur programmé pour extraire des formes régulières d'un certain groupe. C'est dans ce groupe-là que les coquillages vont chercher leur régularité.

Quel groupe ? Un groupe *plus grand que le groupe d'Euclide* ; il contient à la fois les déplacements et les dilatations ; nous l'appellerons

groupe de Thalès ([1]).

Ces bestioles nous désignent ainsi un nouveau groupe. Serait-ce celui-là, la régularité de la nature ? Certainement pas, sinon la dilatation de la matière serait un phénomène naturel ; on pourrait à volonté grossir les mouches et les atomes, rapetisser les éléphants et les étoiles. Ça se produit dans la science-fiction, mais pas dans la nature.

Par conséquent, c'est un *surgroupe du groupe naturel* d'Euclide qu'on observe dans les coquilles ; leur régularité, on peut donc la qualifier de « *surnaturelle* ».
Ces formes ne peuvent pas se produire par l'usure de la matière — mais, nous venons de le voir, par un programme informatique.

Et c'est très probablement de cette façon que les coquillages les construisent ; comme tous les êtres vivants, ils possèdent un programme de croissance inscrit dans leur patrimoine génétique ([2]).

Les groupes sont des outils de la vie que les bigorneaux savent utiliser ;

faisons comme eux…

1 Il est étudié dans la *clé 4* : *espace et temps classiques*.

2 Programme qui implique une évolution des processus métaboliques : le coquillage ne peut pas utiliser « des atomes de plus en plus gros » au fur et à mesure qu'il grandit exponentiellement. Il en faut davantage, et il faut les gérer différemment.

force et lumière

Contemporain d'Euclide, Archimède a utilisé des objets euclidiens qui ne sont pas constitués de points : les ***efforts***. Efforts qui provoquent l'équilibre ou le déséquilibre des règles, des compas, des équerres, des leviers, des bateaux ; qui tirent sur les cordes ou qui les tordent.

Qu'est-ce qu'un effort, pour un géomètre ?

Il appartient à une catégorie générale, que l'on appelle aujourd'hui les

moments ✯ ([1]).

Les moments, ça s'ajoute ; les règles d'Archimède concernant la statique (*leviers, corps flottants*) peuvent s'exprimer ainsi : *si un corps est en équilibre, la somme des moments qu'il subit est nulle.*

Utilisons maintenant un intéressant théorème du 20ème siècle : chaque « *famille de moments »* ([2]) est automatiquement pourvue d'une nouvelle géométrie, la

géométrie symplectique ✯ ([3])

Oui, mais à quoi ça sert ?

Prenons l'exemple le plus simple : une seule force, qui agit le long d'une droite ([4]).

Déplaçons cette force (grâce au groupe d'Euclide) : on pourra la transporter sur n'importe quelle droite de l'espace.

C'est ainsi que la famille des forces obtenues peut se représenter par *l'ensemble des droites orientées*, transmettant chacune une *force* de la même intensité que la force initiale.

L'ensemble de toutes ces droites est ainsi une *famille de moments* ; elle est donc *automatiquement symplectique*.

Eh bien, nous en rencontrons dans la nature, des droites orientées : les **rayons lumineux**. La *géométrie euclidienne* des rayons lumineux s'accompagne donc aussi d'une *géométrie symplectique de la lumière*. ✯

Nous pouvons donc transposer à la lumière ce que nous savons déjà pour les forces. Voici les résultats :

- Chaque type de rayon lumineux se caractérise par une nouvelle grandeur, la *couleur*. ([5])

1 Objets géométriques qui jouent un rôle important dans diverses branches de la physique. Nous donnons pp. 39-40 quelques exemples ; prochain rendez-vous : *matérialisme idéal*, p. 60.

2 Famille, au sens indiqué p. 29 (*l'origine des espèces*).

3 « symplectique » : simple transcription grecque du mot « compliqué ».

4 Pensons à la force transmise ***par une corde tendue***.

5 Cette couleur correspond à **l'intensité** de la force.

- Quand un rayon lumineux traverse un instrument d'optique, il en ressort avec la même couleur, en respectant la géométrie symplectique. Voilà une aubaine pour produire ces instruments ([1]). ✯
- Il existe un phénomène curieux, appelé « *diffraction* », qui empêche d'isoler un rayon lumineux. Il n'est possible de concentrer la lumière que sur certains « *faisceaux lumineux* » ([2]). La géométrie symplectique permet de déterminer quels sont les faisceaux possibles. ✯

Et puisque les instruments d'optique respectent cette géométrie, un faisceau lumineux entrant dans un instrument d'optique en ressortira sous forme de faisceau. Voilà par exemple pourquoi les reflets sur les parois d'une tasse éclairée par le soleil peuvent faire apparaître une courbe brillante au fond de la tasse…([3]).

Il existe une autre grandeur caractéristique des *rayons lumineux* ([4]). Celle-là, elle est la même pour toutes les lumières ; elle est très petite ; on l'appelle ***la constante de Planck***.

Si petite soit-elle, elle implique une propriété fondamentale : la lumière ordinaire est un mélange de deux lumières pures, que l'on dit « ***polarisées*** », l'une à droite, l'autre à gauche ([5]).

De là découlent divers effets optiques importants, par exemple ceux qui permettent d'analyser divers produits biologiques tels que les sucres ([6]).

---

1 Aussi bien pour les « systèmes dioptriques » (les verres de lunettes) que pour les « systèmes cata-dioptriques » (les miroirs ardents de Syracuse ou les télescopes). C'est de là que découlent les méthodes de calcul des instruments d'optique créées dans les années 1860 par Ernst Abbe ; celles qui ont fait la fortune de la maison Carl Zeiss à Iéna.

2 Par exemple un faisceau parallèle, comme celui qui nous parvient d'une étoile lointaine.

3 Les tasses sont donc aussi des instruments d'optique… Ces courbes s'appellent « caustiques », elles peuvent se rebrousser sur des « foyers ». Et au foyer d'une loupe éclairée par le soleil, il peut faire très chaud.

4 Dans la correspondance avec les cordes (p.38), pensons à une corde non seulement **tendue**, mais aussi **tordue** (dans un sens ou dans l'autre, évidemment).

5 Cette polarisation de la lumière (dite « ***polarisation circulaire*** ») a été découverte par Augustin Fresnel vers 1810, en faisant passer la lumière dans un empilement de prismes de quartz.

6 Voir *sucreries*, p. 65.