

# PHYSIQUE ET GÉOMÉTRIE

JEAN-MARIE SOURIAU

RÉSUMÉ. La *géométrie différentielle*, héritière contemporaine du calcul infinitésimal du 17<sup>ème</sup> siècle, apparaît aujourd'hui comme le langage le plus direct pour décrire la réalité physique.

Ceci à toute échelle : la notion de « connexion », par exemple, est utilisée aussi bien pour construire des modèles d'Univers que pour décrire l'intérieur du proton. Rien de plus contraire à la sagesse du physicien ; et pourtant « ça marche ».

L'exposé qui va suivre a pour ambition de mettre en évidence le rôle conceptuel de cette géométrie sur quelques exemples – sans entrer dans les détails techniques. Pour cela, il faudra souvent renoncer à une certaine rigueur mathématique, et même à des définitions complètes ; mais nous pourrons cependant donner une description précise de l'enchaînement des idées – grâce à quelques éléments de la théorie des groupes.

## 1. QU'EST CE QUE LA GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE ?

On sait que la géométrie d'Euclide est fondée sur la notion de « figures égales » – deux figures étant dites égales si on peut les superposer par une opération appelée *déplacement*.

En remarquant que les déplacements euclidiens constituent un *groupe*, au sens aujourd'hui très classique défini par Evariste Galois, Felix Klein a donné une généralisation de la notion de géométrie ; plus précisément, une *classification des géométries* (« Programme d'Erlangen », 1872). Une géométrie, c'est la donnée d'un ensemble  $E$  (l'« espace ») et d'un groupe  $G$  de transformations de  $E$ , qui vont jouer le rôle des déplacements.

Choisissons par exemple comme espace une surface ordinaire  $S$  – une sphère pour fixer les idées. On peut choisir comme groupe  $G$  l'ensemble des transformations de  $S$  qui sont continues ainsi que leur inverse (on les appelle des « homéomorphismes ») ; la géométrie associée à ce choix de  $G$  est, par définition, la *topologie* de la surface.

La *géométrie différentielle* de  $S$  s'obtient en choisissant un sous groupe  $G$  du groupe des homéomorphismes ; on exige que tout élément de  $G$  soit *différentiable*, c'est à dire que les fonctions impliquées possèdent des dérivées partielles de tous les ordres. Les éléments du groupe ainsi restreint s'appellent *difféomorphismes* de la surfaces  $S$ . Ces difféomorphismes ont par exemple la propriété de transformer deux courbes (tracées sur  $S$ ) qui sont tangentes en deux courbes tangentes ; deux courbes osculatrices en courbes

osculatrices ; ainsi ces propriétés dites de « contact » appartiennent à la géométrie différentielle.

la géométrie différentielle ne s'occupe pas seulement des surfaces ; les espaces généraux concernés s'appellent *variétés* (en anglais « manifolds »). Les courbes sont des variétés de dimensions 1, les surfaces des variétés de dimensions 2 ; on considère en général des variétés de dimension quelconque  $n$ .

Est-ce si difficile et si abstrait de se représenter une variété de dimension 4, par exemple ?

Considérons l'ensemble  $D$  de toutes les droites de l'espace ordinaire. On se convainc assez facilement qu'une droite « dépend de 4 paramètres », qu'il est naturel de choisir 4 nombres pour la repérer (par exemple les coordonnées  $x_1, y_1$ , et  $x_2, y_2$  de ses traces sur deux plans parallèles  $P_1$  et  $P_2$ ). Il est clair qu'un tel système de coordonnées n'est pas valable pour toutes les droites ; il faudra par exemple choisir un autre système de plans, définir de nouvelles coordonnées pour repérer la droite dans le cas où elle viendrait à devenir parallèle aux plans initiaux (et vous devinez bien qu'il faudra pour certaines droites prendre un troisième couple de plans).

La situation est tout à fait analogue dans le cas d'une sphère, la surface de la Terre par exemple : on peut choisir des coordonnées sur la Terre – c'est nécessaire lorsqu'on veut dresser une carte ; pour représenter la Terre tout entière, on devra construire un « atlas » composé de plusieurs cartes (exemple : un planisphère de Mercator et deux cartes des régions polaires).

C'est le langage même utilisé pour *définir une variété  $V$  de dimension quelconque  $n$*  : il doit exister un « atlas » de  $V$ , composé de « cartes » ou systèmes de  $n$  coordonnées, qui représentent au total  $V$  toute entière ; la seule condition exigée et que les formules de changement de coordonnées, qui font passer d'une carte à l'autre, soient différentiables.

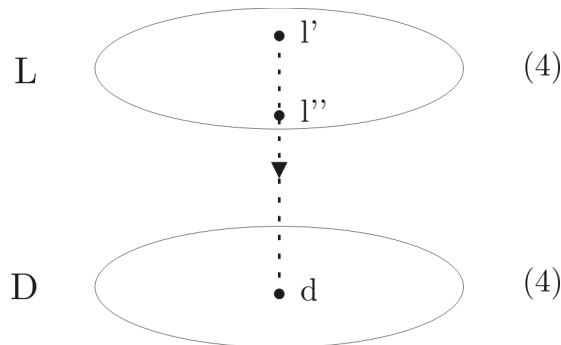
Ainsi l'ensemble  $D$  de toutes les droites de l'espace ordinaire est bien une variété ; la dimension de  $D$  est 4, parce qu'il faut 4 coordonnées pour repérer une droite  $d$  – *considérée comme un point de  $D$* .

## 2. UN PEU D'HOMOTOPIE ...

Nous venons d'étudier la variété des droites, que nous avons appelée  $D$  ; nous pouvons lui associer une autre variété  $L$ , *de même dimension 4*, dont les points seront les *droites orientées* (pouvez-vous trouver un atlas de  $L$  composé de 6 cartes ?). Nous utiliserons plus loin  $L$  comme variété des *rayons lumineux*.

Puisqu'une droite  $d$  possède deux orientations  $l'$  et  $l''$ , on peut associer ces deux points  $l'$  et  $l''$  de  $L$  à un même point  $d$  de  $D$  (Fig. 1) : on dit que  $L$  est un *revêtement* de  $D$ .

la variété  $L$  est d'un seul tenant, en ce sens que : deux points de  $L$  peuvent toujours se joindre par une courbe continue (pensons aux manipulations d'un bâton !) ; on dit que  $L$  est *connexe*.

FIG. 1.  $L$  est un revêtement de  $D$ .

Nous venons de trouver un revêtement connexe de la variété  $D$  ; pour d'autres variétés connexes, il n'en existe pas ; on dit que ces variétés sont *simplement connexes*. Ainsi une sphère  $S$  est simplement connexe, et la variété  $L$  des rayons lumineux aussi.

Soit  $l$  une droite orientée, donc un point de  $L$ . Désignant par  $R(l)$  la même droite, mais orientée dans l'autre sens. Un peu de réflexion montre que  $R$  est un *difféomorphisme* de  $L$  ; il est évident que la composée  $R \circ R$  de  $R$  avec elle-même est l'identité  $I$  sur  $L$ . Donc  $R$  et  $I$  constituent un groupe  $H$  de difféomorphismes de  $L$ , et on peut dire que la variété  $D$  est le quotient par  $H$  de la variété  $L$ , ce que nous écrirons  $D = L/H$ .

Cette situation est générale : si  $V$  est une variété connexe, il existe une variété simplement connexe  $W$ , un groupe  $H$  de difféomorphismes de  $W$ , tels que  $V = W/H$ . Avec des conditions précises que nous ne pouvons évidemment pas détailler ici, il s'agit d'une construction standard : la donnée de  $V$  définit complètement la variété  $W$  (appelé *revêtement universel* de la variété  $V$ ), et la structure du groupe  $H$  (appelé *groupe d'homotopie* de  $V$ ).

Bien sûr, ces notions peuvent faire peur par leur abstraction ; *mais on rencontre en physique divers phénomènes qui restent indéchiffrables si on ne possède pas cette clef que constitue la théorie de l'homotopie*. Nous allons en rencontrer plusieurs exemples.

Les déplacements de l'espace euclidien ordinaire constituent, nous l'avons dit, un *groupe* ; mais ils constituent aussi une variété de dimension 6 (il n'est pas trop difficile de choisir 6 paramètres pour repérer un déplacement, par exemple les coordonnées de l'image d'un point et trois angles de rotation). De tels objets, qui sont à la fois groupes et variétés (avec quelques règles de compatibilité entre les deux structures) s'appelle *groupes de Lie* (du nom de Sophus Lie, mathématicien norvégien). Les groupes de Lie apparaissent aujourd'hui comme l'une des acquisitions les plus importantes des mathématiques pures et de la physique théorique.

Que nous apprend la théorie de l'homotopie, appliquée à un groupe de Lie  $G$  ? Si  $G$  n'est pas simplement connexe, son revêtement universel  $G'$  est encore un groupe de Lie ; le groupe d'homotopie  $H$  de la variété  $G$  est un sous-groupe commutatif de  $G'$ .

Prenons l'exemple du groupe  $G$  des déplacements euclidiens. Dans ce cas, le groupe d'homotopie  $H$  est à deux éléments – l'identité et *un autre* ; le revêtement universel  $G'$  est donc différent de  $G$ . Une question se pose alors : puisque la géométrie euclidienne classique est associée à  $G$ , existe-t-il une « super-géométrie » associée au groupe  $G'$  ? il s'agit d'un problème inverse (connaissant le groupe, trouver l'espace), qui a été résolu par Élie Cartan.

Contrairement ce qu'on pourrait croire, il s'agit d'un problème concret. Les objets matériels qui ressemblent le plus aux « points mathématiques » sont évidemment les particules de la microphysique ; or l'expérience montre qu'il en existe deux espèces, gérées soit par la géométrie classique du groupe  $G$ , soit par la super-géométrie du groupe  $G'$  ; on les appelle respectivement *bosons* et *fermions*.

Faites le tour d'un objet ordinaire, un « boson » par exemple. Quand le tour est complet, vous le retrouvez exactement à la même place, sans rien de changé. Mais si vous faites la même chose *autour d'un fermion*, lui ne sera plus pareil ! Et pour pouvoir le retrouver dans son état initial, vous serez obligés de faire *deux* tours autour de lui. Pourquoi deux tours ? Simplement parce que le groupe d'homotopie  $H$  est à deux éléments.

Rien de plus banal qu'un fermion (un électron, par exemple) ; et rien de plus contraire à nos habitudes d'esprit que ce paradoxe des deux tours. Il ne s'agit pourtant pas d'une idée folle ; l'expérience a été faite et a donné le résultat annoncé, un demi-siècle après la prédiction théorique. Un fait de ce genre montre bien que notre intuition de l'espace est infirme, et qu'il est *nécessaire* de recourir aux concepts de la géométrie différentielle – à l'homotopie par exemple – pour appréhender correctement le monde réel.

### 3. QU'EST-CE QU'UN OBJET GÉOMÉTRIQUE ?

Pour répondre utilement à cette question, il est indispensable de mémoriser deux définitions algébriques – même si on aime pas ça.

- a) Soient  $G$  et  $H$  deux groupes,  $M$  une application de  $G$  dans  $H$  (si on préfère, une fonction définie sur  $G$ , à valeur dans  $H$ ) ; on dit que  $M$  est un morphisme si  $M$  possède la propriété suivante :

$$M(gg') = M(g)M(g')$$

valable quel que soient les éléments  $g$  et  $g'$  dans le groupe  $G$ .

- b) Soit  $F$  un ensemble ; considérons le groupe  $F!$  de toutes les permutations (ou bijections) de  $F$ . On appelle *action* d'un groupe  $G$  sur l'ensemble  $F$  tout morphisme du groupe  $G$  dans ce groupe  $F!$  des permutations de  $F$ .

c'est tout...

Revenons maintenant à la géométrie euclidienne ;  $G$  est ici le groupe des déplacements. Considérons une figure géométrique, par exemple un triangle  $(A, B, C)$ . Si  $g$  est un déplacement, le nouveau triangle  $(g(A), g(B), g(C))$

s'appelle *image* par le déplacement  $g$  du triangle  $(A, B, C)$ ; nous pouvons écrire

$$I(g)(A, B, C);$$

il suffit de trois lignes de calcul pour vérifier que l'opération « image » (que nous venons de nommer  $I$ ) est une *action* du groupe  $G$  sur l'ensemble des triangles – au sens b) ci-dessus.

Par extension, *chaque fois qu'on aura défini une action du groupe  $G$  sur un ensemble  $F$ , les éléments de  $F$  seront appelés « objets géométriques ».* Certains de ces objets, comme les triangles, pourront être des figures composées de points de l'espace; *mais il en existe d'autres, et il sont aussi importants pour les sciences physiques.*

Exemples : la mécanique, l'électromagnétisme, la cristallographie ont amené à créer et à utiliser les concepts suivants : *vecteurs libres* (axiaux ou polaires); *vecteur glissant*; *torseurs*; *tenseurs*; ce sont tous des objets géométriques pour le groupe  $G$  des déplacements. Les spineurs – créés évidemment pour décrire des particules à spin – sont des objets géométriques pour le groupe  $G'$  de la « super-géométrie » étudiée au §2.

Le vieux « calcul infinitésimal » repose en grande partie sur la notion de *points infiniment voisins* d'un point donné; il s'agit encore objets géométriques, non seulement pour la géométrie euclidienne, mais même dans le cadre plus large de la géométrie différentielle. La terminologie en usage est celle de vecteur tangent  $v$  à une variété  $X$  en un point  $x$ ; si  $g$  est un difféomorphisme, l'action de  $g$  transforme  $v$  en un nouveau vecteur, tangent à  $X$  au point  $g(x)$ . On sait définir le produit de  $v$  par un nombre, la somme de deux vecteurs tangents, et ces opérations sont invariantes par difféomorphisme. Conséquence : toutes les ressources de l'*algèbre linéaire* vont permettre de créer de nouveaux objets géométriques attachés à un point  $x$  : *formes linéaires* ou *covecteurs*; *tenseurs d'ordre quelconque  $p$* ; *tenseurs antisymétriques* ou  *$p$ -formes*; *densités*; *densités tensorielles*; *capacités*; *orientations*; etc. Et tous ces objets jouent un rôle important en physique mathématique.

Citons pour terminer quelques objets géométriques dont la définition est un peu plus subtile – mais qui sont tout aussi utiles : les *germes*, les *jets*, les *connexions*, etc.

#### 4. SYMÉTRIES

Considérons une figure « symétrique », au sens habituel du terme; par exemple un triangle  $(A, B, C)$  qui est isocèle :  $AB = AC$ .

La symétrie de la figure, c'est la symétrie par rapport à la hauteur issue de  $A$  : il s'agit d'un déplacement  $g$  du plan, caractérisé par les propriétés  $g(A) = A$ ,  $g(B) = C$ ,  $g(C) = B$ . Autrement dit, l'image par  $g$  du triangle  $(A, B, C)$ , considéré comme ensemble de trois points, est le triangle lui-même; si nous désignons par  $f$  la figure constituée par ce triangle, nous avons donc

$$g(f) = f$$

Soit maintenant  $f$  une figure quelconque, ou plus généralement un objet géométrique. Évidemment, nous pourrions encore appeler *symétries* de  $f$  les éléments  $g$  du groupe  $G$  vérifiant cette équation  $g(f) = f$  ; il est immédiat qu'ils constituent un sous-groupe de  $G$  ; on l'appelle *groupe de symétrie* ou *stabilisateur* de l'objet  $f$ . nous allons en rencontrer divers exemples.

## 5. CHAMPS, RELATIVITÉ

Considérons une variété  $X$ , et une fonction qui associe à chaque *point*  $x$  de  $X$  un vecteur tangent à  $X$  (en ce point  $x$  naturellement). Une telle fonction s'appelle *champ de vecteurs* sur  $X$  ; on définit de même les champs de tenseurs, de  $p$ -formes, etc., pour toutes les catégories d'objets que nous avons cités au §3.

On sait que l'étude des champs est une branche fondamentale de la physique mathématique classique (exemples : la mécanique des fluides ; la théorie de l'élasticité ; le champ électromagnétique de Maxwell ; etc.).

Une remarque fondamentale : si  $g$  est un *difféomorphisme* de la variété  $X$ , l'image par  $g$  d'un champ est encore un champ de même nature ; par conséquent les *champs sont eux-mêmes des objets de la géométrie différentielle*. Comme tout objet géométrique, un champ possède donc un *groupe de symétries* (voir le §4).

- Prenons l'exemple d'un *crystal*, considéré comme milieu continu illimité – c'est-à-dire comme un *champ* au sens ci-dessus. Nous savons a priori que son groupe de symétrie est un sous-groupe du groupe  $G$  des déplacements euclidiens ; une courageuse analyse mathématique a montré qu'il y a exactement 230 types de sous-groupe de  $G$  qui peuvent convenir (les « groupes cristallographiques ») ; nous disposons donc d'une *classification* fondamentale des cristaux ; elle permet de connaître a priori ceux qui pourront produire tel ou tel type de phénomènes physiques (piézo-électricité, bi-réfringence, etc.). Cette classification reste pertinente lorsqu'on dispose d'un modèle plus raffiné prenant en compte l'architecture atomique du cristal.

- On appelle variété *riemannienne* une variété sur laquelle est donné un champ de tenseur  $g_{\mu\nu}$ , vérifiant les conditions  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ ,  $\det(g_{\mu\nu}) \neq 0$ .

Albert Einstein a montré que la représentation la plus exacte de la *gravitation* était donné par une telle structure riemannienne de l'espace-temps à 4 dimensions, les  $g_{\mu\nu}$  étant considéré comme *potentiels de gravitation*. Cette théorie – la Relativité générale – n'a cessé d'être confronté à l'observation depuis plus de 60 ans. Grâce notamment aux efforts de la NASA, c'est aujourd'hui l'une des théories physiques dont les prédictions sont les mieux vérifiées (avec une précision de  $10^{-12}$ , affirme-t-on).

On remarquera qu'il y a une relation inverse entre *effet gravitationnel* d'une part, *symétrie du champ* d'autre part ; en particulier l'absence totale de gravitation (*espace de Minkowski*) correspond à la symétrie maximum,

définie par un groupe dont la dimension est 10 ; on l'appelle groupe de Poincaré. Ce groupe de Poincaré définit évidemment une géométrie de l'espace-temps ; si vous admettez que cette géométrie est seule pertinente pour décrire la réalité physique, vous faites de la *relativité restreinte*.

Nous voyons clairement la relation qui existe entre Relativité générale et Relativité restreinte : les deux théories sont associées à deux géométries, donc à deux groupes ; le second est un *sous-groupe* du premier. Par conséquent un objet géométrique en Relativité générale induit automatiquement un objet de Relativité restreinte – *mais le problème inverse ne possède pas de solution standard ; des grandeurs physiques ayant le même statut géométrique en Relativité restreinte peuvent différer en Relativité générale*. Cette différence constitue en elle-même une information fondamentale sur la nature du phénomène ; d'une importance analogue, par exemple, aux informations fournies par l'analyse dimensionnelle.

Prenons l'exemple de la *thermodynamique des milieux continus*. Un grand nombre de variables interviennent : masse spécifique, énergie, impulsion, vitesse, contraintes, déformation, vitesse de déformation, température, chaleur, entropie, etc. Comment mettre de l'ordre dans ce fatras ? Le principe de Relativité générale donne une réponse – inhabituelle, mais efficace – à ce problème. Selon ce principe, les phénomènes physiques sont représentés par des objets géométriques associés au groupe des difféomorphismes : ce qui permet une classification fine, dans laquelle par exemple température et vitesse sont associées pour définir un *vecteur tangent à l'espace-temps* (selon une prescription déjà proposée par Max Planck) ; chaleur et production d'entropie définissent une *densité vectorielle* ; etc. La reconnaissance de ces faits nous donnent immédiatement des renseignements sur les relations possibles entre ces grandeurs (pas question, par exemple, d'ajouter vecteur et densité vectoriel ! Le résultat ne serait plus le même après difféomorphisme). On voit tout ce qu'on peut espérer obtenir en abordant la thermodynamique par le point de vue de la géométrie différentielle.

La Relativité générale fournit donc des *règles universelles de classification* et de *sélection* pour les grandeurs et les lois physiques, au moins à l'échelle macroscopique. Une théorie convenablement formulée dans ce cadre pourra ensuite se transcrire en Relativité restreinte, puis en Mécanique Classique.

Depuis des années les spécialistes des milieux continus invoquent un certain « principe d'indifférence matérielle », dont on sent bien la nécessité pour écrire correctement les lois de comportement des matériaux – mais ce principe ne se laisse jamais formulé exactement... Pourtant la réponse est à portée de la main : il suffit d'accepter de faire ce détour par la Relativité générale ; la même méthode permet aussi de traiter simultanément les phénomènes électro-dynamiques macroscopiques, telles que l'aimantation, la magnéto-striction, l'effet gyro-magnétique, etc.

## 6. VARIÉTÉ SYMPLECTIQUES

La géométrie symplectique ressemble au départ beaucoup à la géométrie euclidienne : on considère une variété  $X$ , munie d'un champ de tenseur  $\sigma_{\mu\nu}$  ( $\sigma$  va remplacer le tenseur métrique  $g$ ), supposé *inversible* ( $\det(\sigma_{\mu\nu}) \neq 0$ ) et *plat* (il existe un atlas de  $X$  où les  $\sigma_{\mu\nu}$  sont des constantes); mais on remplace la condition de symétrie  $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$  par la condition d'*antisymétrie*  $\sigma_{\nu\mu} = -\sigma_{\mu\nu}$ . On peut démontrer que ces conditions ne sont compatibles que si la dimension de la variété  $X$  est un *nombre pair*.

La structure symplectique a été découverte en 1811 par Joseph-Louis de Lagrange ; les composantes covariantes et contravariantes du tenseur  $\sigma$  sont les « crochets » et « parenthèses » de Lagrange. Leur découverte est le résultat d'une investigation profonde de la structure des équations de la mécanique.

La variété à laquelle Lagrange donne une structure symplectique est l'ensemble des solutions des « équations du mouvement » d'un système dynamique – nous dirons simplement l'*espace des mouvements*.

Cette théorie, développées dans la « Mécanique Analytique », oeuvre classique par excellence, n'a pourtant pas été réellement comprise par les contemporains et les épigones de Lagrange. Poisson, Hamilton, par exemple ne l'ont transmise que sous forme tronquée. En particulier la structure symplectique et définition l'« espace de phases » ; choix désastreux qui fait disparaître à la fois les propriétés globales et les propriétés relativistes de la mécanique.

Un siècle plus tard, complétant les travaux de Henri Poincaré sur les « invariants intégraux », Élie Cartan réinvente la forme symplectique (« invariant intégral absolu ») ; les vraies dimensions de l'oeuvre de Lagrange réapparaissent progressivement.

Sous son aspect géométrique actuel, la théorie n'a guère été développée avant les années 1950. Il est facile d'écrire la forme symplectique  $\sigma$  à l'aide des conditions initiales : positions, vitesse, date (F; Gallissot, J.M. Souriau) ; les *forces* acquièrent ainsi le statut de *composantes de  $\sigma$* , ce qui fixe leur variance dans les changements de coordonnées quelconques ; dans le cas de référentiels tournants par exemple, les forces centrifuges et forces de Coriolis apparaissent spontanément. Évidemment, la condition de platitude de  $\sigma$  (voir ci-dessus) impose des conditions aux forces ; dans le cas des forces électromagnétiques, on voit ainsi apparaître la partie homogène des *équations de Maxwell*. Indiquons enfin que le principe des travaux virtuels s'obtient en tronquant  $\sigma$  (en oubliant les variations de date).

La structure symplectique apparaît aussi sur tous les espaces dont les points sont les solutions d'un problème de « calcul des variations » – calcul développé, on le sait, par Euler et Lagrange, et qui concerne des déterminations de minima ou de maxima.

Ainsi la ligne droite et le plus court chemin d'un point à un autre : il en résulte que l'ensemble  $L$  des droites orientées est une *variété symplectique*.



Cette structure est particulièrement importante en optique : les instruments (miroirs, lunettes, objectifs photographiques, etc.) sont caractérisés par la transformation (entrée)  $\longrightarrow$  (sortie) qu'ils font subir aux rayons lumineux ; transformation ponctuelle de la variété  $L$  des rayons. Une propriété de cette transformation et de commuter avec ce que nous avons noté  $R$  au §2 : c'est la formulation exacte du « principe de retour inverse de la lumière ». Une autre propriété de cette transformation, c'est de *conserver la structure symplectique* : ce théorème de Lagrange découle simplement du fait que les lois de l'optique dérive d'un principe variationnel – le *principe de Fermat*.

Habilement exploité par le physicien Ernst Abbe, ce résultat fondamental est à l'origine de la méthode moderne de calcul des instruments d'optique (relation d'aplanétisme, eikonal, etc.) ; Abbe fut cofondateur de la maison Zeiss à Iéna.

La possibilité d'utiliser un principe variationnel en mécanique classique (Pierre de Maupertuis, William Hamilton) a suggéré très tôt une analogie de structure avec l'optique ; analogie qui a été largement exploitée dans les premières théories quantiques – notamment la *mécanique ondulatoire* de Louis de Broglie.

Mais la formulation variationnelle de la mécanique est moins puissante que sa formulation symplectique : elle n'est pas manifestement covariante pour les transformations de Galilée (voir le §7 ci-dessous) ; elle nécessite un choix arbitraire des potentiels ou des potentiels-vecteurs ; enfin il existe des systèmes pour lesquelles *elle est impossible*, alors que la formulation symplectique subsiste par exemple dans le cas des particules à spin (voir le §7) ; les équations classiques du mouvement de ces objets (Bargman-Michel-Telegdi) n'ont été écrites et utilisées que longtemps après leur description quantique.

## 7. GROUPES DYNAMIQUES

Soit  $X$  une variété symplectique (§6). Les symétries du champ  $\sigma$  (définies aux §4 et §5 ci-dessus) s'appelle *symplectomorphismes* de  $X$  ; le groupe des symplectomorphismes définit la *géométrie symplectique* de  $X$ .

Étudions un système dynamique libre dans l'espace (par exemple une molécule, ou encore le système solaire). Chaque mouvement possible du système est évidemment un objet de géométrie euclidienne ; par conséquent le groupe des déplacements euclidiens *agit* sur la variété symplectique  $X$  des mouvements.

Dans tous les cas connus on constate que cette action se fait par « symplectomorphismes » ; par conséquent *l'une des caractéristiques physiques essentielles du système est un morphisme*

$$G \longrightarrow \{\text{symplectomorphismes de } X\}$$

$G$  étant ici le groupe des déplacements euclidiens. Chaque fois qu'un groupe de Lie  $G$  est muni d'un tel morphisme, on dit que  $G$  est un *groupe dynamique* de  $X$  (techniquement, on exige en plus des conditions de différentiabilité).

La *symétrie* du système définie par l'existence d'un groupe dynamique est associée à une propriété de *conservation* : c'est ce que montre un théorème fondamental établi par la mathématicienne Emmy Noether en 1918 (le théorème original concerne les groupes de dimensions 1 et les systèmes variationnels ; nous allons étudier le cas général).

Si  $G$  est groupe dynamique d'une variété symplectique  $X$ , on peut associer à chaque point de  $X$  une nouvelle grandeur appelée *moment* ; ce moment est lui-même un objet géométrique appartenant à l'espace des « torseurs » du groupe  $G$  (quelques indications réservées aux connaisseurs : un torseur est une 1-forme sur l'algèbre de Lie de  $G$  ; l'action de  $G$  est coadjointe). Le nombre des composantes d'un torseur est égal à la dimension de  $G$ .

Nous n'allons pas donner de définition mathématique du moment, mais simplement des exemples.

- Prenons le cas d'un système dynamique libre dans l'espace et du groupe des déplacements ; alors le moment est un être à 6 composantes, constitué de l'*impulsion* et du *moment cinétique* du système (qui s'appellent en anglais : momentum, angular momentum). Par construction, ces grandeurs *restent fixes* lors de l'évolution du système ; pour cette raison, on les appelle « *constantes du mouvement* », « *grandeurs conservées* » ou « *intégrales premières* ».

- Considérons maintenant la variété  $L$  des droites orientées – ou rayons lumineux – dont nous avons étudié la structure symplectique au §6. Là aussi, le groupe des déplacements est groupe dynamique ; le moment associé existe, à quoi peut-il servir ?

En fait, les mathématiciens connaissent depuis longtemps les 6 composantes de ce moment : ce sont les « coordonnées plückeriennes » de la droite, utilisées en géométrie élémentaire. Une question se pose naturellement : pourrait-on leur donner une *interprétation mécaniste*, en termes d'impulsion et de moment cinétique ?

Cette interprétation, c'est en substance celle qu'a donnée Einstein en 1905, lorsqu'il a inventé une particule transporteuse de lumière (le *photon*). Einstein attribuait explicitement à cette particule diverses grandeurs mécaniques, telles que l'impulsion, et montrait que l'effet photoélectrique s'interprétait correctement par le transfert à la matière cible des grandeurs associées à un photon.

Ce sont donc ces grandeurs symplectiques – et notamment le moment – qui interviennent dans les transferts entre domaines apparemment disjoints de la physique, tels qu'optique et mécanique. Ceci suggère évidemment que la structure symplectique joue un rôle *universel*. En fait, *toutes les grandeurs conservées usuelles, en mécanique ou en physique, s'obtiennent*

comme moments d'un groupe dynamique  $G$  bien choisi. Nous allons le constater sur de nouveaux exemples.

- Un système conservatif est évidemment invariant par le groupe des « translations temporelles » – qui consiste à retarder ou avancer chaque mouvement d'une même durée. Le moment correspondant à ce groupe est l'énergie.

- Un système dynamique libre est un objet géométrique, non seulement pour le « groupe d'Aristote » (déplacements euclidiens + translations temporelles), mais pour un groupe de dimensions 10 (le *groupe de Galilée*) qu'on obtient en complétant le groupe d'Aristote par les « transformations de Galilée » ; transformations qui consistent à ajouter une même vitesse initiale à tous les points du système. L'application du théorème de Noether symplectique prédit alors que le mouvement du *centre de masse* (ou centre de gravité) est *rectiligne et uniforme* ; résultat parfois connu sous le nom de principe de l'inertie (il a été formulé pour la première fois par Gassendi).

Pour établir ce résultat, Newton a dû introduire un principe spécial de la mécanique, l'égalité de l'action et de la réaction. Ici c'est inutile : l'invariance symplectique galiléenne constitue un principe suffisant.

Chaque fois qu'on est en présence d'un groupe dynamique  $G$ , se pose le problème de l'« équivariance » : on connaît l'action de  $G$  sur la variété symplectique  $X$  d'une part ; sur ses toseurs d'autre part ; il s'agit de savoir si la fonction moment s'insère entre ces deux actions en les laissant compatibles. Une subtilité de la situation, c'est que la fonction moment n'est pas complètement définie : on peut lui ajouter une constante arbitraire.

Heureusement, les mathématiciens ont construit un outil qui permet d'analyser cette situation : c'est la « cohomologie ». Cette théorie permet de savoir si l'équivariance est possible ou non, et si elle permet de diminuer l'arbitraire des constantes additives. Mieux, elle permet de définir des grandeurs nouvelles – les « classes de cohomologie » – qui vont s'interpréter physiquement.

Appliquée au groupe de Galilée – donc à la Mécanique Classique – la cohomologie va fournir des résultats essentiels :

- des 10 grandeurs constituant le moment, une seule va contenir une constante additive irréductible : il s'agit de l'énergie ;
- corrélativement, il apparaît une nouvelle grandeur, la « classe de cohomologie » du système : c'est simplement la *masse*.

Tous ceux qui ont enseigné la physique connaissent le manque d'évidence intuitive de ce concept de masse ; il n'est pas interdit de relier cette difficulté avec la subtilité du statut que nous venons d'attribuer à cette grandeur. Il ne s'agit pas seulement d'un artifice mathématique : nous allons voir que la cohomologie est un outil efficace pour analyser quelques faits fondamentaux.

Pour *tout* système dont la masse n'est pas nulle, on peut ainsi démontrer qu'il existe un groupe dynamique plus grand que le groupe de Galilée, dont la dimension est 14 ; ce qui permet de décomposer l'énergie en somme de

deux grandeurs conservées : énergie cinétique (du barycentre) + énergie propre. De même le moment cinétique est une somme : (moment cinétique orbital) + (moment cinétique propre). 14 grandeurs conservées apparaissent bien au total.

Il est vrai qu'on avait obtenu la plupart de ces résultats sans utiliser la structure symplectique ; mais ils acquièrent ici un caractère *universel* qu'ils n'avaient pas auparavant ; ils sont valables pour tous les systèmes dynamiques galiléens – même ceux que l'on ne peut pas interpréter par un système de points matériels interagissant et pour lesquels le principe d'égalité de l'action et de la réaction n'est même pas formulable (exemple : un système contenant des *aimants*).

- On passe de la Mécanique Classique à la Mécanique Relativiste sans rien changer à la structure symplectique – simplement en remplaçant le groupe de Galilée par le groupe Poincaré (défini ci-dessus au §5). *Ce sont les différences de structure des deux groupes qui vont engendrer les différences qualitatives entre les deux mécaniques.*

Ainsi, la « cohomologie symplectique » du groupe de Poincaré est *nulle* ; il en résulte qu'il n'y a pas de constante arbitraire dans l'énergie relativiste – et pas non plus de masse relativiste fixe.

Pour un observateur donné, un même système dynamique peut s'étudier soit en Mécanique Classique, soit en Mécanique Relativiste ; il existe une procédure géométrique simple qui permet d'identifier les *moments* obtenus dans les deux théories ; parmi les 10 égalités ainsi obtenues, figure la célèbre formule Einstein

$$E = mc^2$$

qui relie l'énergie relativiste  $E$  et la masse galiléenne  $m$ . Il est significatif qu'Einstein n'ait justifié cette formule que par des arguments assez obscurs ; la technique géométrique appropriée n'était pas disponible en 1905. Cette obscurité subsiste d'ailleurs dans la plupart des traités de Relativité.

- Revenons à la Mécanique Classique, et considérons un point qui est attiré ou repoussé, selon une loi arbitraire, par un point fixe  $O$ . Ce système possède évidemment la symétrie sphérique autour de  $O$  ; le moment associé est le moment cinétique en ce point. Mais dans le cas particulier du *champ coulombien*, il apparaît une nouvelle grandeur conservée (le vecteur de Laplace-Lenz) ; elle correspond à une *symétrie cachée*, le groupe dynamique associé étant composé des rotations dans un espace euclidien à 4 dimensions assez mystérieux.

Cette interprétation a été pressentie en 1926 par Wolfgang Pauli, dans un travail sur le spectre de l'hydrogène ; travail qui a marqué historiquement l'avènement de la Mécanique Quantique. C'est l'existence de ce groupe de symétries qui entraîne la dégénérescence des niveaux d'énergie de l'hydrogène – donc l'existence de *couches* pour les électrons dans un atome quelconque (approximation « hydrogénoïde »). Ce sont ces couches qui expliquent la vieille notion de *valence* en chimie ; telle la quadrivalence du carbone –

propriété fondamentale pour toute la chimie organique, donc pour la vie elle-même.

- En *physique nucléaire*, les modèles en « couches » sont concurrencés par les modèles collectifs en « gouttes ». Ceux-ci peuvent encore se construire à partir d'un groupe dynamique (constitué des transformations linéaires de l'espace qui conservent le volume) et des propriétés du moment associé (S. Sternberg, G. Rosensteel).

Donnons pour terminer des exemples de la procédure inverse : connaissant un groupe de Lie  $G$ , trouver une variété symplectique  $X$  dont  $G$  soit groupe dynamique. Sous certaines conditions, ce problème a une solution régulière, la *construction de Kirillov* – complétée pour tenir compte de la cohomologie.

- Ainsi la seule donnée du groupe de Poincaré suffit-elle à définir des systèmes dynamiques relativistes « abstraits » ; ces modèles mathématiques sont des cases toutes prêtes dans lesquelles viennent s'inscrire les *particules élémentaires* réelles.

Ces modèles sont indexés par deux nombres, la *masse au repos* et le *spin* ; si la masse est nulle, une troisième quantité est nécessaire, l'*hélicité* ; elle apparaît comme une orientation spatiale, susceptible de prendre deux valeurs (pensons au sens d'un tire-bouchon).

Toutes ces quantités *s'observent et se mesurent sur les particules réelles* : masse et spin, par exemple, font partie de la « carte d'identité » des particules ; ainsi le photon a la masse 0, le spin 1. Il existe effectivement deux espèces de photons, polarisés circulairement à gauche ou à droite selon la valeur de l'hélicité ; on peut les trier dans la lumière naturelle au moyen d'un prisme de quartz (biréfringence rotatoire de Fresnel).

- L'expérience a fait découvrir progressivement d'autres grandeurs transportées par les particules réelles (spin isotopique, hyper-charge, étrangeté, couleur, etc.) ; simultanément, elle a montré que ces particules se groupaient en *multiplets* : doublet des nucléons, triplet des pions, octets des baryons, triplet des quarks, etc.

Or on sait associer à chacun de ses multiplets *une variété symplectique* ; variété qu'on peut construire par la méthode de Kirillov à partir d'un groupe de Lie, appelé *groupe de jauge*. Les nouvelles grandeurs observées sont justement les moments associés à ce groupe.

Ces groupes de jauge permettent de classer les particules et de définir leur dynamique ; il donne un espoir raisonnable de mieux comprendre un jour la structure de la matière.

## 8. LE NIVEAU PRÉQUANTIQUE

On doit à Élie Cartan une théorie générale des  $p$ -formes (voir le §3 ci-dessus) ; deux procédures essentielles de cette théorie sont la *dérivation* des formes (généralisant les opérations classiques de gradient, divergence, rotationnel), et la *réduction* (qui permet dans certains cas de caractériser une forme à l'aide d'une variété de dimension plus petite).

Considérons une variété  $Y$  munie d'une 1-forme  $\omega$  (en d'autres termes, d'un champ de tenseur  $\omega_\mu$ ). Il peut arriver que  $\omega$  soit irréductible, mais pas sa dérivée  $d\omega$  : cette situation est connue sous le nom de *structure de contact*. Dans ce cas, on peut montrer que la dimension de la variété  $Y$  est *impaire* (soit  $2n + 1$ ), et que la forme  $d\omega$  se réduit, en général, en donnant une structure *symplectique* à une variété  $X$ , de dimension  $2n$ , sur laquelle se projette  $Y$  (Fig.2).

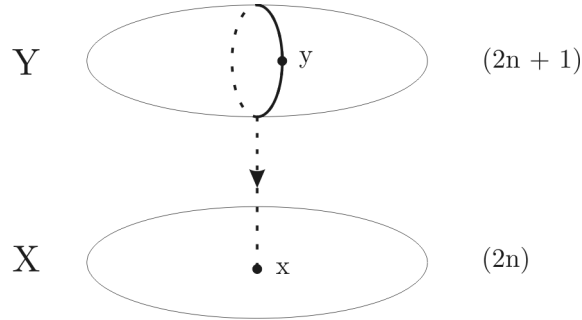


FIG. 2.  $Y$  se projette sur  $X$ .

L'ensemble des points de  $Y$  qui se projettent en un même point de  $X$  est une courbe. Supposons ces courbes *fermées*, et considérons la circulation  $h$  de  $\omega$  sur l'une d'entre elles :

$$h = \oint \omega_\mu dy^\mu$$

On peut démontrer que  $h$  est constante (indépendante de la courbe choisie); le cas qui va nous intéresser et celui où  $h$  est égal à la *constante de Planck*

$$h = 6.6262 \cdot 10^{-27} \text{ g cm}^2 \text{ s}^{-1} :$$

nous dirons alors que  $Y$  est une *variété quantique*.

Pour quoi faire, cette nouvelle structure ? Pour décrire les phénomènes naturels. Nous allons constater en effet un nouveau principe de la physique : *chaque système dynamique réel est associé à une variété quantique  $Y$* . Aux §§ 6 et 7, nous avons décrit divers systèmes dynamiques au moyen d'une variété symplectique  $X$  ; *cette variété devra coïncider avec celle qui se déduit de  $Y$  par la construction de la figure 2*.

Par conséquent la description « classique » au niveau de  $X$  est *incomplète*, il faut reconstituer la variété quantique  $Y$  à partir de  $X$ . Ce problème purement géométrique s'appelle *préquantification* de  $X$  (Bertram Kostant). En principe, il est complètement résolu : on sait formuler des conditions permettant de savoir s'il a zéro, une ou plusieurs solutions.

Avant d'examiner des exemples, une remarque : ce problème est cohérent pour l'analyse dimensionnelle, parce que la constante de Planck  $h$  et la forme symplectique  $\sigma$  définie par Lagrange (§6) ont toutes deux la dimension d'une *action*, à savoir  $ML^2T^{-1}$ .

Les *particules élémentaires* sont associées à des variétés symplectiques (voir le §7) ; on démontre que le problème de la préquantification n'a de solution que si le spin  $s$  de la particule (§7) est un multiple entier du nombre  $h/4\pi$  ; or *c'est ce qui se passe pour toutes les particules connues* :  $s = h/4\pi$  pour les protons, neutrons ou électrons ;  $s = h/2\pi$  pour les photons ; etc. ; on observe des multiples allant jusqu'au facteur 6. Dans tous ces cas la variété quantique  $Y$  existe donc, et on peut démontrer qu'elle est unique.

Pour d'autres systèmes, le problème de la préquantification de  $X$  peut avoir *plusieurs solutions* ; la géométrie nous dit même exactement combien il en a : autant que de *morphismes* (§3, a) du *groupe d'homotopie* de  $X$  (§2) dans le *tore* (= groupe des rotations du cercle). Théoriquement, ce nombre peut donc se déterminer chaque fois.

- Ainsi, pour une particule chargée qui circule autour d'un solénoïde rectiligne, il y a une *infinité* de préquantifications possibles (on repère chacune par un point du tore) ; celle qui est « choisie par la nature » est caractérisée par l'intensité du courant circulant dans le solénoïde (Peter Horvathy). À première vue, la situation est très classique ; en fait, elle est *paradoxe* pour le sens commun, parce que le champ magnétique créé par un solénoïde infini est *nul*, et ne devrait donc produire aucun effet sur la particule ; pourtant l'effet prévu a bien été mis en évidence par des expériences d'interférences (effet Bohm-Aharonov). Un cas typique donc où notre conceptualisation est insuffisante, et où le recours à la géométrie différentielle est nécessaire.

- Considérons maintenant un système de  $n$  *particules identiques* ; on démontre qu'il y a exactement deux préquantifications possibles.

L'expérience montre que la nature choisit l'une ou l'autre suivant le type des particules, *bosons* ou *fermions* (voir le §2) ; ce choix se manifeste physiquement par des propriétés collectives :

- les fermions – par exemple les électrons – se conforment au *principe d'exclusion de Pauli*, qui permet notamment l'existence de l'*état solide* ; c'est grâce à lui que nous ne passons pas au travers des mesures où des planchers ;
- les bosons – par exemple les photons – peuvent au contraire adopter un seul état collectif. C'est ce qui se passe dans la lumière cohérente des lasers ; c'est aussi cette propriété des bosons qui expliquent les phénomènes de supraconductivité et de superfluidité.

Nous venons d'esquisser un « bestiaire » des variétés quantiques qu'on observe dans la Nature. Pour passer au niveau « zoologique », il convient de découvrir quelques propriétés spécifiques des variétés quantiques  $Y$  que l'on observe effectivement. Une de ces propriétés est la suivante :  $Y$  doit être capable d'héberger un objet géométrique appelé *polarisation* (B. Kostant), ou encore un objet plus précis appelé *polarisateur* (J.M. Souriau). Christian Duval en a déduit des règles qui sont jusqu'à présent observées dans les exemples connus : le spin d'une particule de masse nulle doit être égal au produit de  $h/4\pi$  par 1, 2 ou 4 ; certains multiplets de jauge (voir le §7) sont

exclus – ce qui interdit par exemple au quarks de se grouper deux par deux ; etc.

### 9. LA MÉCANIQUE QUANTIQUE EXISTE-T-ELLE ?

Considérons une variété quantique  $Y$ , dont la structure est définie par un champ de tenseur  $\omega_\mu$  (voir le §8).

Les *symétries* de  $\omega$  (au sens précis du §4) s'appelle *quantomorphisms* ; ces quantomorphisms constituent nécessairement un groupe  $Q$ , qui définit une *géométrie* de  $Y$ . C'est à cette géométrie qu'appartiennent, par exemple, des objets considérés au §8, les polarisateurs.

$Q$  n'est pas un groupe de Lie, parce que sa dimension est infinie ; on peut cependant en définir le *revêtement universel*  $Q'$  (voir le §2), que nous appellerons *groupe quantique*.  $Q'$  définit évidemment une « super-géométrie » de  $Y$ , qui va être utilisée par la physique quantique.

Le jeu des groupes auxquels nous avons affaire est résumé par le diagramme suivant :

$$Q' \longrightarrow Q \longrightarrow S$$

où les deux flèches ( $\longrightarrow$ ) sont des morphismes (cf. §3) et où  $S$  désigne le groupe des symplectomorphisme de  $X$  (Fig.2). Nous allons réinterpréter les faits physiques élémentaires dans cette nouvelle description de la nature.

Les grandeurs susceptibles d'être mesurées physiquement – appelées *variables dynamiques* ou encore *observables* – sont des fonctions définies sur la variété  $X$  ; mais on peut aussi les définir comme des *sous-groupes* de  $Q'$  (sous-groupe de dimension 1). Au §7, nous avons suivi le chemin inverse : partir d'un sous-groupe et lui associer une variable dynamique, le *moment*. L'universalité de cette notion est requise ici : *les seules grandeurs observables désormais sont des moments*, attachés chacun à une certaine symétrie naturelle.

En mécanique classique (§ 6 et 7), nous avons caractérisé l'état effectif d'un système par un *point* de la variété  $X$  (un « mouvement » du système). Nous allons aussi modifier ce point de vue, en nous raccrochant plus directement aux groupes : un *état quantique* sera une fonction définie sur le *groupe quantique*  $Q'$ , et vérifiant certaines conditions que nous ne pouvons pas détailler ici (les états constituent un ensemble convexe de fonctions de type positif).

En mécanique classique, une observable  $f$ , dans un mouvement  $x$  du système, prenait simplement la valeur  $f(x)$ , et c'était cette valeur que l'on pensait mesurer expérimentalement. Ici, la situation est nouvelle : une observable et un état quantique définissent mathématiquement un *spectre* (la transformée de Fourier de la fonction « état quantique » sur le groupe « observable ») ; physiquement, ce spectre est la seule information disponible sur le résultat de la mesure. Telle est l'*interprétation probabiliste de la mécanique quantique*. Le fait que le groupe quantique soit non-commutatif permet d'établir d'émigration systématique de la *largeur* des spectres ; on généralise ainsi les *relations d'incertitude* d'Heisenberg.



Soit  $a$  un élément du groupe  $Q'$ , et  $m$  un état quantique ; la fonction  $a(m)$ , définie sur  $Q'$  par la formule

$$a(m)(b) = m(a^{-1}ba)$$

est encore un état ; cette formelle définit une *action* de  $Q'$  sur l'ensemble des états ; par conséquent les états quantiques sont eux-mêmes des objets géométriques, appartenant apparemment à la super-géométrie de  $Y$ . En fait, des propriétés de commutation montrent que l'état  $a(m)$  ne dépend de  $a$  que par sa projection sur le groupe  $S$  des symplectomorphismes ; il en résulte que *les états quantiques sont des objets de géométrie symplectique* – en d'autres termes, ils appartiennent à la *Mécanique Classique* : voilà une formulation précise du « principe de correspondance » entre mécanique quantique et mécanique classique.

- La mécanique quantique n'est pas encore une théorie mathématiquement achevée : bien des incohérences subsistent, et on ne peut l'appliquer avec certitude que dans des domaines déjà solidement éprouvés – la chimie quantique par exemple ; au contraire, les bases théoriques de la physique nucléaire restent à construire.

La méthode esquissée ici (la « quantification géométrique ») n'échappe pas à ces difficultés ; les états quantiques, qui sont en principe des fonctions définies sur le groupe  $Q'$  tout entier, ne sont la plupart du temps définies effectivement que sur des sous-groupes plus au moins étendus. On ne peut donc prévoir les spectres que de certaines observables ; mais dans ces cas-là, les prédictions théoriques sont bien conformes à l'expérience.

En utilisant diverses ressources de l'analyse harmonique (construction de Gelfand-Naimark-Segal, théorème de Stone), on peut faire apparaître un « espace de Hilbert »  $H$  ; on sait ainsi décrire un état quantique au moyen d'un *vecteur* de  $H$ . (qui n'est défini qu'à une phase près) ; associer à une observable classique un *opérateur* self-adjoint : le lien est donc établi entre cette « quantification géométrique » et les procédures quantiques habituelles.

On notera que la définition des états comme fonctions sur un groupe est plus générale que sa définition par un vecteur ; elle contient le cas des états « mélangés » de la mécanique statistique quantique (état de Gibbs, approximation de Hartree-Fock de la chimie quantique, etc.).