LA STRUCTURE SYMPLECTIQUE DE LA MÉCANIQUE DÉCRITE PAR LAGRANGE EN 1811

JEAN-MARIE SOURIAU

La première édition de la "**Mécanique Analytique**" de Lagrange est parue en 1768. Lagrange était alors âgé de 52 ans ; il venait de quitter Berlin (où il avait succédé à Euler) pour Paris, où il était "Pensionnaire Vétéran de l'Académie des Sciences" ; il était entouré d'une estime et d'une vénération générales. De nombreuses éditions ont été publiées depuis ; nous utilisons ici la 3e édition, rééditée en fac-simile par la Librairie Albert Blanchard (1965).

C'est dans l'Avertissement de la première édition que se trouve la petite phrase provocante :

> "*On ne trouvera point de Figures dons cet Ouvrage.*"

Complétée par le commentaire suivant :

> "*Les méthodes que j'y expose ne demandent ni constructions, ni raisonnements géométriques ou mécaniques mais seulement des opérations algébriques, assujetties à une marche régulière et uniforme. Ceux qui aiment l'analyse verront avec plaisir la mécanique en devenir une nouvelle branche...*"

Ce que résume clairement, d'ailleurs le titre même de l'ouvrage.

L'Analyse dont il est question ici s'appelle aujourd'hui "analyse réelle" ; le point de vue adopté par Lagrange, qui utilise cette analyse mais refuse les figures et les *raisonnements géométriques* s'appelle **géométrie locale** (par opposition à la géométrie **globale**) ; nous nous- proposons de décrire Lagrange comme fondateur de la "géométrie symplectique" : il s'agira donc de **géométrie symplectique locale**.

La deuxième édition de la Mécanique Analytique était prévue en deux volumes ; seul le premier parut du vivant de Lagrange, en 1811.

Dans l'Avertissement de ce premier volume, Lagrange nous explique que la *cinquième Section* est

> "*entièrement nouvelle ; elle renferme la théorie de le variation des constantes arbitraires, qui a fait l'objet de trois mémoires imprimés parmi ceux de la première Classe de l'Institut, pour l'année 1808, mais présentés d'une manière plus simple et comme une méthode générale d'approximation pour tous les problèmes de mécanique...*"

Journée d'histoire des sciences de Marseille, "*Mécanique et Mathématiques*", Vieille Charité 4-5 octobre 1985.

C'est cette Section 5 que nous allons d'abord analyser.

Commençons toutefois par les fameuses "**équations de Lagrange**", qui sont exposées dans la Section 4 sous le nom d'"*équations différentielles pour la solution de tous les problèmes de mécanique*". Lagrange les établit dans le cas où les forces *dérivent*, comme nous disons aujourd'hui, d'un potentiel ; potentiel qu'il note V. Il fait joliment remarquer que les forces de ce type sont "*proprement le cas de la nature*" (p. 290).

Lagrange montre que, *dans le cas où forces et liaisons sont indépendantes du temps*, ces équations ont une *intégrale première*

$$H = T + V$$

T étant la "demi-force vive" ; H est donc ce que nous appelons aujourd'hui l'**énergie** (les deux termes étant désignés respectivement comme énergie *cinétique* et énergie *potentielle*) ; on dit aussi que H est l'**hamiltonien** ; simple coïncidence d'initiale, semble-t-il, puisque Sir William Rowan Hamilton, le "Lagrange irlandais", n'avait que six ans lors de la parution de le deuxième édition de la "Mécanique Analytique".

Peut-être le choix de le lettre H est-il un hommage à Huygens – qui avait été l'un des premiers à expliquer et à utiliser ce principe ?

Il est clair, en tous cas, que Lagrange insère ici la démonstration, de la conservation de H pour prouver que ses équations caractérisent complètement les mouvements, et n'ont besoin d'aucun "principe" complémentaire.

Venons-en à cette Section 5. Lagrange fait d'abord remarquer que les équations du mouvement peuvent s'écrire en utilisant la seule variable

$$Z = T - V.$$

Résultat aujourd'hui très classique : c'est l'écriture des "équations de Lagrange" à partir du "lagrangien" Z (p. 301) ; seule diffère aujourd'hui le notation : on écrit L (comme "Lagrange") au lieu de Z.

Une remarque étonnante : Lagrange n'énonce pas à cette occasion le principe variationnel correspondant, qui ne pouvait pourtant guère lui échapper ; principe formulé par Hamilton en 1834 dans le cas "indépendant du temps", et dans le cas général par Jacobi en 1842. Peut-être Lagrange avait-il simplement remis cette rédaction à plus tard, c'est-à-dire au second volume qu'il n'a pas eu le temps d'achever ?

Toujours est-il que, partant de ces seules "équations aux variations" Lagrange établit (pp. 300-304) qu'une certaine expression :

$$\begin{aligned} &\triangle\xi\,\delta(dZ/d\xi') + \triangle\psi\,\delta(dZ/d\psi') + \cdots \\ &-\delta\xi\,\triangle(dZ/d\xi') - \delta\psi\,\triangle(dZ/d\psi') - \cdots \end{aligned}$$

est *indépendante du temps*.

Dans cette formule, $\xi, \psi, \ldots$, désignent des variables quelconques qui repèrent la position des points matériels constituant le système ; avec les notations usuelles aujourd'hui, l'écriture serait donc

$$\sum_j \quad \delta p_j \triangle q_j - \triangle p_j \delta q_j.$$

Quant aux symboles Δ et δ, c'est ce que Lagrange appelle des *caractéristiques* ; nous dirions plutôt des "variations", qui seraient associées à des "vecteurs tangents" ; mais tangents à quoi ? nous allons le voir.

Avant d'interpréter ce théorème, faisons deux remarques historiques :

1) Le **théorème de Poisson** (1609), faisant suite aux mémoires de Lagrange de 1808 et 1809, exprime que l'expression

$$(a,b) = \sum_j \quad \frac{\partial a}{\partial p_j}\frac{\partial b}{\partial q_j} - \frac{\partial b}{\partial p_j}\frac{\partial a}{\partial q_j}$$

où a et b désigne deux constantes du mouvement est elle-même une constante du mouvement ; (a,b) s'appelait **parenthèse de Poisson**, mais les physiciens contemporains, à la suite de Dirac semble-t-il, parlent plutôt de **crochets** de Poisson ("Poisson brackets") et écrivent $\{a,b\}$.

L'analogie formelle entre le théorème de Poisson et celui de Lagrange saute aux yeux ; nous pourrons, avec Lagrange lui-même, l'analyser en termes de **dualité**.

2) Le théorème même de Lagrange e été "réinventé" et complété un siècle plus tard par Poincaré et Cartan – qui l'on énoncé en termes d'**invariants intégraux**.

Mais dans l'intervalle, le résultat de Lagrange semble avoir été occulté à la communauté scientifique (à l'exception peut-être des praticiens de le Mécanique Céleste), alors que le théorème de Poisson avait été Qualifié de "prodigieux" par Jacobi (cité par Joseph Bertrand). Symptomatiquement, dans son Histoire de la Mécanique (1950), René Dugas ne consacre que cinq lignes à cette partie de le Mécanique Analytique - contre sept pages au théorème de Poisson.

Quelle est la raison de cette occultation ? Peut-être un obstacle conceptuel, dû à la définition même des variables avec lesquelles Lagrange travaille.

Revenons au texte de 1811 ; Lagrange écrit

> "*... les constantes arbitraires qui donnent à la solution d'un problème de mécanique toute l'étendue qu'elle peut avoir, sont les valeurs initiales des variables, ainsi que celles de leur différences [dérivées] premières, c'est à dire les valeurs de* ξ, ψ, *etc. et de* $d\xi/dt$, $d\psi/dt$, *etc.,* **lorsque** $t = 0$."

Lagrange remplace ensuite le système de variables : $\xi' = d\xi/dt$, $d\psi' = \psi/dt$, par $dT/d\xi'$, $dT/d\psi'$, ... et il désigne les valeurs de ce double système pour $t = 0$ par $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$

Lagrange considère donc "*toute l'étendue que peut avoir une solution d'un problème de mécanique*", c'est-à-dire **l'un des mouvements du système** ; nous allons désigner *l'ensemble* de ces mouvements par X.

Lagrange suppose que les équations du mouvement ont été *intégrées* (ce qui lui paraît toujours possible en principe), c'est-à-dire qu'il existe une formule donnant à chaque instant t, *la position et la vitesse de tous les points du système* (nous dirons simplement l'**état** du système) en fonction des $2n+1$ **variables** $t, \alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$; c'est l'expression mathématique du déterminisme à la Laplace.

Chaque mouvement du système peut donc se repérer de deux façons ; soit en choisissant une date t et en considérant l'**état du système à cette date** ; soit, de façon intemporelle en repérant un point x de l'ensemble X par des "coordonnées" ; c'est ce que vient de faire Lagrange, en proposant $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$

Un ensemble X où on peut définir de tels systèmes de coordonnées s'appelle aujourd'hui une **variété** ; dans le cas qui nous occupe, l'ensemble X des mouvement intemporels est donc une variété ; on remarque que la **dimension** de cette variété (c'est à dire le nombre de variables nécessaires) est **paire** (à cause du double système de coordonnées qui se correspondent deux à deux).

Nous avons dans le langage contemporain les mots nécessaires pour exprimer le statut des caractéristiques δ et $\triangle$ "*que nous regarderons comme relatives uniquement aux variations des constantes arbitraires qui sont censées contenues dans les expressions des variables* ξ, ψ, *etc.*" : δ et $\triangle$ représentent **deux vecteurs tangents à la variété des mouvements** X en un même point x.

Venons en au problème de la *variation des constantes arbitraires dues à des forces perturbatrices*.

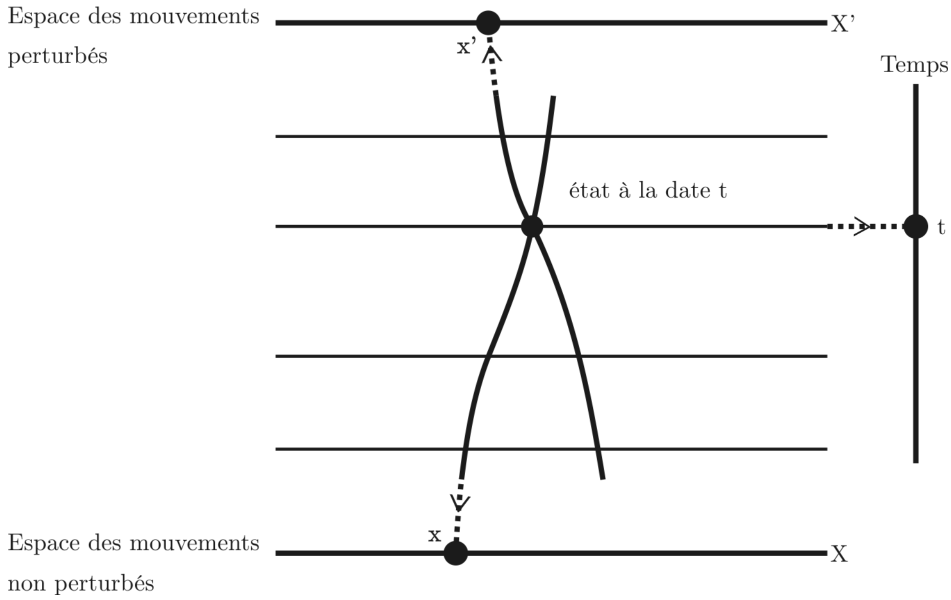
Considérons un autre système dynamique, constitué des mêmes points, ayant les mêmes masses et éventuellement les mêmes liaisons mais différant de la première par l'addition de forces supplémentaires ; forces que Lagrange caractérise par une modification du potentiel V :

$$V \to V - \Omega$$

Ω est donc, au signe près, un *potentiel de perturbation*.

Ceci étant, **comment comparer les mouvements du système initial et ceux du système perturbé** ? Décrivons la méthode de Lagrange.

On considère un mouvement x' du **système perturbé**, dans toute son étendue temporelle. A chaque instant t, ce système perturbé se trouve dans un certain état de positions et de vitesses, cet état **appartient aussi à l'un des mouvements du premier système** ; mouvement que nous allons noter x **et qui dépend bien entendu de le date** t **choisie pour comparer les deux états**.



L'effet de la perturbation peut donc se caractériser par l'**évolution temporelle** du point x dans l'espace X des mouvements intemporels du système.

Grâce au théorème établi précédemment, Lagrange montre que cette évolution est régie par le système d'équations différentielles :

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}, \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\mu}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = -\frac{d\Omega}{d\nu}, \quad \ldots,$$
$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{d\Omega}{d\alpha}, \quad \frac{d\mu}{dt} = \frac{d\Omega}{d\beta}, \quad \frac{d\nu}{dt} = \frac{d\Omega}{d\gamma}, \quad \ldots,$$

(p. 310) ; on reconnaît immédiatement la forme des "**équations canoniques**" qui ont été écrites 30 ans plus tard par Hamilton.

Mais le passage de ces équations de Lagrange à celles de Hamilton nous semble accompagné d'**une régression conceptuelle**.

Expliquons nous : les équations de Hamilton veulent décrire l'**évolution de l'état du système** ; ce qui implique l'existence d'un "espace des états", nécessairement intemporel pour qu'on puisse y évoluer. On a nommé cet objet "**espace de phases**", et ce cadre de l'espace de phases e été quasi-unanimement adopté pour la description théorique de la Mécanique.

Et pourtant il s'agit d'un objet **entièrement artificiel** – puisque nous sommes incapables de **comparer deux états d'un même système à des dates différentes** ; en fait, il n'existe même aucune procédure objective de comparaison de deux **positions** d'un même corps à des dates différentes (là où je suis actuellement, et il y a six heures, était-ce le mer ? se demande le Zénon de Marguerite Yourcenar, cherchant à concevoir le rotation de la Terre ; où se serait il situé s'il avait pensé par exemple au mouvement de le Terre autour du Soleil ?).

L'apparence intemporelle de l'espace de phases provient donc du **choix implicite d'un système de référence** ; choix qui n'appartient pas à la "*nature*", mais à nous-mêmes ; à nous qui sommes des animaux terrestres et qui trouvons légitime de reconnaître des territoires permanents.

Galilée utilisait la métaphore du bateau s'éloignant de le terre pour exposer ce que nous appelons aujourd'hui le **relativité galiléenne** ; l'espace de phases ne quitte pas le port et est donc inapte à décrire cette relativité galiléenne. Inapte aussi, bien entendu, à la relativité d'Einstein.

Revenons aux équations écrites par Lagrange, et analysons-les maintenant *du point de vue mathématique* ; en termes de géométrie contemporaine, nous pouvons tenir le discours suivant :

"La variété X est munie (localement) d'une **2-forme symplectique** σ caractérisée par le fait que les variables $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda, \mu, \nu, \ldots$ soient des **coordonnées canoniques** ; l'évolution temporelle du point $x \in X$ est définie par l'équations différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma^{-1}(\omega)$$

ω étant la 1-forme dérivée du potentiel de perturbation Ω."

Nous allons en effet trouver **dans le texte même de Lagrange** tous les ingrédients de ce discours.

D'abord, Lagrange met en œuvre le statut local de variété de l'ensemble X – c'est-à-dire qu'il y effectue des changements de coordonnées :

> "*Quoique les constantes arbitraires que nous avons employées soient celles qui se présentent le plus naturellement ... il arrive souvent que les différentes intégrations introduisent à leur place d'autres constantes mais qui ne peuvent être que des fonctions de celles-là.*"

Lagrange considère donc de nouvelles coordonnées arbitraires $a, b, \ldots, k, \ldots,$ dont le nombre est le même que précédemment, et par conséquent pair, mais qui ne sont plus associées deux à deux ; il introduit les expressions

$$(a,b)$$

telles que les équations aux perturbations s'écrivent :

$$\frac{dk}{dt} = (k,a)\frac{d\Omega}{db} + (k,b)\frac{d\Omega}{db} + (k,b)\frac{d\Omega}{dc} + \cdots$$

pour chaque variable k.

(p. 315 ; l'une des formules de cette page est erronée). Si on adopte une convention de sommation sur des indices qui est usuelle aujourd'hui, cette formule peut aussi s'écrire :

$$\frac{dx^k}{dt} = \sigma^{ka}\omega_a$$

à condition de poser :

$$\sigma^{ka} = (k, a)$$

et

$$\omega_a = \frac{d\Omega}{da};$$

avec ces notations, on reconnaît dans la formule de Lagrange une relation *tensorielle* dont l'interprétation géométrique est précisément celle que nous venons d'écrire :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma^{-1}(\omega).$$

Ainsi les "parenthèses de Lagrange" (a, b) sont les **composantes contravariantes du tenseur σ**.

Lagrange donne l'expression de ces parenthèses au moyen des coordonnées "canoniques", et constate qu'elle coïncide avec celle des parenthèses de Poisson. Il en résulte que la matrice des (a, b) est **antisymétrique** – donc que le tenseur σ lui-même est antisymétrique ; il est évident que, dans les coordonnées canoniques, cette matrice prend en tout point la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

la possibilité de choisir des coordonnées qui donnent cette valeur aux composantes de σ, c'est une caractérisation des tenseurs symplectiques (**théorème de Darboux**).

Enfin le théorème même de Lagrange exprime que cette structure symplectique qui a été définie en choisissant la date $t = 0$, ne changerait pas si on avait adopté *une autre date initiale* ; elle n'appartient donc pas particulièrement à l'un des états du système, mais bien à le variété des mouvements intemporels elle-même.

Une remarque importante : Lagrange fait toute cette analyse **sans supposer que les forces ou les liaisons soient indépendantes du temps** ; ce n'est qu'ensuite qu'il examine le cas d'un système qui est conservatif avant la perturbation ; il en tire des considérations sur le caractère *séculaire* des perturbations ; elles appartiennent a la Mécanique Céleste proprement dite, et ne nous intéressent donc pas directement ici.

La suite du raisonnement se trouve, assez paradoxalement, dans l'Avertissement même de ce premier volume ; Lagrange semble y faire un commentaire du contenu du livre, mais en fait il annonce un résultat nouveau qui ne sera développé que dans le second volume. Il écrit, eu sujet des forces de perturbation décrites par la fonction Ω :

> "*Quelles que soient ces forces, si on les décompose, pour chaque corps m du système, en trois X, Y, Z, suivant les coordonnées x, y, z, ... on pourra changer $d\Omega/d\alpha$ en*
>
> $$\delta m(X\frac{dx}{d\alpha} + Y\frac{dy}{d\alpha} + Z\frac{dz}{d\alpha}),$$

> *et ainsi des autres dérivées partielles de Ω. De cette manière, la méthode sera applicable à des forces perturbatrices représentées par des variables quelconques*."

Ce que décrit ici Lagrange, c'est ce que nous appelons aujourd'hui une **forme différentielle** ω ; le cas où les forces perturbatrices sont "*représentées par des variables quelconques*" est évidemment celui où la forme ω **n'est pas exacte**, c'est-à-dire telle qu'il n'existe pas de fonction Ω telle que $\omega = d\Omega$; c'est ainsi qu'on peut interpréter le "remplacement" que propose Lagrange.

Bien entendu *forme non exacte* signifie simplement forme *non fermée* – puisque le point de vue adopté est purement local.

La fin de l'analyse est dans le tome II (édition posthume de 1816), au chapitre I de la Section VIII, intitulé :

> "*Formules générales pour la variation des constantes arbitraires dans le mouvement d'un système de corps, produites par des impulsions finies et instantanées, ou par des impulsions infiniment petites et continuelles*"

On y trouve la définition des grandeurs $[ab]$ qu'on appelle maintenant **crochets de Lagrange** – et qui sont pieusement cités dans la plupart des "traités de mécanique analytique".

Lagrange les caractérise par la formule :

$$\frac{d\Omega}{dk} = [k,a]\frac{da}{dt} + [k,b]\frac{db}{dt} + [k,c]\frac{dc}{dt} + \cdots,$$

qui, comparée à la précédente, doit nécessairement s'écrire :

$$\omega = \sigma(\frac{dx}{dt})$$

puisqu'on avait :

$$\frac{dx}{dt} = \sigma^{-1}(\omega),$$

par conséquent les crochets de Lagrange sont les *composantes covariantes* de la forme σ :

$$[a,b] = \sigma_{ab}.$$

En tout point x de la variété X, les deux systèmes des parenthèses et des crochets de Lagrange constituent donc *deux matrices inverses, chacune antisymétrique* ; la **dualité** que nous indiquions plus haut est donc parfaitement interprétée par Lagrange lui-même.

Il donne enfin l'expression des $[a,b]$ au moyen des dérivées par rapport aux coordonnées canoniques ; sa formule, qui s'écrirait en notations actuelles :

$$[a,b] = \sum_j \quad \frac{\partial q_j}{\partial a}\frac{\partial p_j}{\partial b} - \frac{\partial p_j}{\partial a}\frac{\partial q_j}{\partial b}$$

rejoint le mémoire initial de 1808.

En conclusion, constatons que le structure fondamentale de la dynamique, telle qu'on peut la concevoir aujourd'hui : une variété des mouvements munie "naturellement" d'une structure symplectique **apte en particulier à décrire les perturbations quelles qu'elles soient**, est complètement décrite dans l'œuvre de Lagrange ; mais que cette partie de la Mécanique Analytique semble n'avoir pas été réellement comprise pendant plus d'un siècle.