MATIÈRE ET GÉOMÉTRIE

JEAN-MARIE SOURIAU

Les Géométries au sens de Felix Klein

Pour construire une géométrie, on choisit un ensemble E – l'« espace » de la géométrie – et on munit E d'une certaine *structure*.

Comment caractériser cette structure ? En d'autres termes, comment définir une géométrie ?

L'idée la plus directe consiste à définir certaines propriétés des figures tracées dans E ; par exemple, en géométrie euclidienne, on peut associer à la figure formée de deux points un nombre, la distance de ces points ; il est possible de définir ensuite la géométrie euclidienne elle même comme l'étude des figures décrites par les distances mutuelles de leurs points. En géométrie projective, au contraire, on renonce à parler de distances, et on considère comme fondamentales d'autres propriétés : le fait pour trois points d'être alignés ; le fait pour quatre points alignés de posséder un rapport anharmonique donné ; etc. Dans un cas comme dans l'autre, la pratique de la géométrie consiste à définir rigoureusement les propriétés fondamentales des figures, et à en déduire d'autres.

Ce point de vue n'est pas tout à fait satisfaisant lorsqu'il s'agit de classer les géométries ; d'abord parce que rien ne permet de distinguer, parmi les propriétés des figures, celles qui sont fondamentales de celles qui sont dérivées ; et aussi parce que les mots de « propriété » et de « figure » échappent à toute formalisation directe – de nombreux échecs l'ont suffisamment montré[1].

La voie proposée par Felix Klein[2] pour sortir de cette impasse repose sur la notion d'*automorphisme* : dans le cas de la géométrie euclidienne, les auto-morphismes sont simplement les *déplacements*, bijections particulières de E sur E[3] ; les « propriétés euclidiennes » des figures sont celles qui sont invariantes par tout déplacement : tel est le cas de la distance de deux points, de l'angle de deux droites, etc.

(1)Bourbaki a fait une tentative de ce genre, dans son fascicule consacré aux « structures » ; la dernière édition de ce travail a été « revue et diminuée » ; il est fort probable qu'il doive disparaître de l'œuvre définitive.

(2)« Programme d'Erlangen » (1872).

(3)On appelle *bijection* toute correspondance biunivoque g ici entre (points de E) ; si $\vec{r}$ est un point de E, on notera $g(\vec{r})$ le point *image* de $\vec{r}$ par g ; tout point $\vec{r}$ de E est lui même l'image par g d'un seul point de E, noté $g^{-1}(\vec{r})$; g^{-1} est aussi une bijection de E, appelée *inverse* (ou *réciproque*) de g.

On remarque facilement que l'ensemble G des déplacements constitue un groupe[(1)].

L'idée essentielle de Klein consiste à inverser cette démarche, et à définir une géométrie d'un ensemble E par un groupe G de bijections de E ; les éléments du groupe seront, *par définition*, les *automorphismes* de cette géométrie. Alors le groupe des déplacements devient la définition de la géométrie euclidienne ; la géométrie projective se définit par le « groupe homographique » ; nous allons rencontrer divers autres exemples. Cette idée, et ses prolongements[(2)], ont complètement envahi les mathématiques actuelles ; elles imprègnent aussi la physique théorique ; nous allons examiner comment elles peuvent s'appliquer à la géométrie de l'espace et du temps utilisée en mécanique classique.

NEWTON ET LA GÉOMÉTRIE DE L'ESPACE-TEMPS

Reportons-nous au texte même de Newton[(3)] :

« [Les termes] de *temps*, d'*espace*... sont connus de tout le monde »,

« le temps absolu, vrai et mathématique, sans relation à rien d'extérieur, coule uniformément, et s'appelle durée »,

« nous déterminerons les lieux par les positions et les distances à quelque corps que nous regardons comme immobile ».

Newton emprunte donc la géométrie de l'espace, connue de tous, à savoir la géométrie euclidienne ; il prend même soin de la définir par des propriétés caractéristiques : la *position* (vis-à-vis d'un corps de référence) et la *distance*. Comme nous l'avons dit plus haut, le groupe d'automorphismes correspondant est celui des déplacements.

Nous nous permettons d'interpréter la phrase de Newton relative au temps « absolu, vrai et mathématique » comme une référence à une *géométrie du temps*, où la durée joue le même rôle que la distance en géométrie de l'espace ; le groupe des automorphismes de cette géométrie est simplement le groupe des *avances et retards* ; à savoir des transformations g_a associées chacune à un nombre algébrique a, opérant sur les dates t suivant la règle

$$g_a(t) = t + a. \tag{I}$$

Ce groupe s'appelle aussi « groupe des translations dans le temps »[(4)].

---

(1) C'est-à-dire que $[g \in G] \Rightarrow [g^{-1} \in G]$ (voir la note ci-dessus), et que le produit de composition $g \cdot g'$ de deux éléments de G (défini par $g \cdot g'(\vec{r}) = g(g'(\vec{r})), \forall \vec{r}$) est encore un élément de G.

(2) Exemple : on peut généraliser les *automorphismes* (qui vérifient les axiomes des groupes) par les *morphismes*, qui vérifient les axiomes des *catégories*.

(3) Isaac NEWTON, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, édition de 1726, traduite en français par la Marquise du Châtelet (1756).

(4) Si on considérait seulement la valeur absolue des durées, et non leur signe, il faudrait prendre un groupe plus grand, celui des bijections $t \mapsto a \pm t$; on renoncerait donc à choisir le sens d'écoulement du temps.

« Les temps et les espaces n'ont pas d'autres lieux qu'eux-mêmes, et ils sont les lieux de toutes les choses. Tout est dans le temps, quant à l'ordre de la succession : tout est dans l'espace, quant à l'ordre de la situation. »

Cette dernière phrase indique que l'on peut associer, à tout événement du monde physique, le couple $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix}$ de sa position $\vec{r}$ et de sa date t ; l'ensemble de ces couples $\begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix}$ s'appelle, aujourd'hui, le *produit direct* (ou *produit cartésien*) de l'espace (ensemble des $\vec{r}$) par le temps (ensemble des t) ; l'opération du produit direct étant notée $\times$, on pourrait appeler « espace $\times$ temps » ce nouvel ensemble.

Dire que « les temps et les espaces sont les lieux de toutes choses », c'est donc dire que les « choses » sont des *figures de l'espace-temps*.

La question se pose de munir cet espace-temps d'une géométrie. Une solution évidente consiste à adopter la *géométrie produit* de la géométrie euclidienne et de la géométrie temporelle, que l'on définit par le groupe des bijections

$$\text{(II)} \qquad \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(\vec{r}) \\ t+a \end{pmatrix}$$

g étant un déplacement euclidien, a une durée (algébrique).

On remarque immédiatement que le fait, pour un point matériel, d'être immobile est une propriété dans cette géométrie [(1)] ; or la croyance aristotélicienne au caractère absolu de l'immobilité a été ébranlée définitivement, depuis un siècle, par le *principe de l'inertie* de Galilée, que Newton reprend comme le premier de ses axiomes :

« Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état. »

Ce principe conduit à penser que l'immobilité et le mouvement rectiligne uniforme constituent *la même figure* de l'espace-temps ; donc que chaque bijection[(2)]

$$\text{(III)} \qquad \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \vec{r}+\vec{v}t \\ t \end{pmatrix}$$

doit appartenir au groupe de la « véritable » géométrie de l'espace-temps.

[(1)]La figure constituée dans l'espace-temps par un point immobile s'obtient en choisissant $\vec{r}$ constant, et t variable ; on voit que chacune des bijections (II) donne de cette figure une image où $\vec{r}$ est encore constant, t encore variable.

[(2)]Cette bijection confère évidemment à un point immobile un mouvement rectiligne uniforme de vitesse vectorielle $\vec{v}$;elle peut s'interpréter comme le passage à un nouveau référentiel animé d'un mouvement de translation.

C'est un exercice immédiat d'algèbre linéaire de déterminer *le plus petit groupe* contenant à la fois les bijections (II) et (III) ; il est constitué des

$$\text{(IV)} \qquad \begin{pmatrix} \vec{r} \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} g(\vec{r})+\vec{v}t \\ t+a \end{pmatrix}$$

où g est un déplacement euclidien, $\vec{v}$ un vecteur, a un nombre ; ce groupe s'appelle *groupe de Galilée*(1) ; il définit donc une géométrie de l'espace-temps que nous appellerons *géométrie galiléenne*.

Le problème se pose donc de choisir entre la géométrie (II) et la géométrie galiléenne ; la deuxième option constitue ce que Poincaré appelait encore au début du XX^{e} siècle le *principe de relativité* et que l'on appelle aujourd'hui *principe de relativité galiléenne*(2).

Notons l'attitude ambiguë de Newton devant ce choix ; il remarque bien que nous n'avons aucun moyen pratique de reconnaître l'immobilité « absolue » :

« il faut avouer qu'il est très difficile de connaître les mouvements vrais de chaque corps, et de les distingue effectivement des mouvements apparents »...

« les parties de l'espace ne peuvent être vues ni distinguées les unes des autres par nos sens » ... « il peut se faire qu'il n'y ait aucun corps véritablement en repos auquel on puisse rapporter les lieux et les mouvements » ;
mais d'autre part il ne renie pas la possibilité « philosophique » de définir le repos :

« l'espace absolu, sans relation aux choses externes, demeure toujours similaire et immobile ».

Newton, plus clairvoyant que les physiciens du XIX^{e} siècle, ne croit guère à la possibilité de définir l'immobilité par rapport à l'éther :

« je ne fais point attention ici au milieu qui passe librement entre les parties des corps, supposé qu'un tel milieu existe »,

il semble plutôt rattacher l'espace absolu à des considérations cosmologiques :

« il est possible qu'il y ait quelque corps *dans la région des fixes ou beaucoup au-delà*, qui soit dans un repos absolu »... « il n'y a de lieux immobiles

---

(1)On pourrait songer à élargir ce groupe, par exemple par inclusion des bijections faisant passer d'un repère « fixe » à un repère tournant. Mais alors des mouvements accélères constitueraient la même figure que des mouvements rectilignes uniformes, ce qui semble en contradiction avec le principe de l'inertie. En fait, il n'y a contradiction qu'avec le postulat newtonien donnant un caractère absolu à la force (« vis impressa ») ; c'est Einstein qui devait suggérer d'y renoncer dans certains cas (en interprétant le *principe d'équivalence* entre masse inerte et masse pesante) ; ce qui lui permit de proposer le principe de *relativité généralisée* ; principe que nous pouvons formuler aujourd'hui comme suit : la géométrie de l'espace-temps est définie par le groupe des *difféomorphismes* (voir par exemple J. M. SOURIAU, *Géométrie et Relativité Hermann*, 1964).

(2)Pour le distinguer du principe de relativité restreinte d'Einstein.

que ceux que conservent *à l'infini dans tous les sens* leurs situations respectives ; et ce sont ces lieux qui constituent l'espace que j'appelle *immobile* » [(1)].

De toutes façons, on peut vérifier élémentairement que la mécanique newtonienne est compatible avec le principe de relativité ; autrement dit qu'elle ne formule que des propriétés galiléennes des figures de l'espace-temps que sont « les choses » ; nous étudierons plus loin des conséquences physiques de ce fait.

– Il est très remarquable que la scolastique actuelle de la mécanique classique, qui admet le principe de relativité galiléenne, ne l'ait pas entièrement assimilé : nombreux sont ceux qui tombent dans les pièges tendus par le langage courant – essentiellement non-galiléen ; citons quelques exemples : « le système solaire se dirige vers la constellation d'Hercule à la vitesse de 20 km/s » (manuel) ; « le commandant Titov a parcouru une distance totale de 703 143 km » (Fédération aéronautique internationale, 1962) ; « the trajectory of a celestial body is its path in space » (Encyclopaedia Britannica, 1966) ; le lecteur pourra analyser la part de subjectivité de ces propos – dont les auteurs croient parler objectivement de l'espace.

Nous allons voir, d'ailleurs, que l'hésitation de Newton pèse encore lourdement sur la mécanique théorique elle-même.

LES ESPACES DE LA MÉCANIQUE ANALYTIQUE

« Mécanique analytique », c'est le titre – et le programme – d'une œuvre de Lagrange[(2)] ; les figures en sont bannies ; les raisonnements sont formulés dans le langage de ce qu'on appelait alors l'*analyse* mathématique. C'est devenu ensuite le nom d'une discipline contenant, en principe, l'œuvre de Lagrange et celle de ses successeurs : Poisson, Hamilton, Jacobi notamment.

Le romantisme de l'œuvre de Lagrange – pleine d'éclairs et d'obscurités – a abouti naturellement à un classicisme formel ; à ce que les physiciens appellent aujourd'hui *formalisme lagrangien*, *formalisme hamiltonien*.

Ce sont des règles qui permettent de prédire le mouvement d'un système mécanique sans être obligé d'établir un bilan détaillé des forces (forces appliquées, forces de réaction, forces de liaison, etc.) ; voici d'ailleurs l'essentiel du formalisme hamiltonien.

Si on désigne par $q_1, \ldots, q_n$ les coordonnées[(3)] à l'instant t des divers points matériels constituant un système mécanique, on appelle *lagrangien* la fonction $L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n)$ exprimant, en fonction, du temps t,

---

(1) La plupart des modèles cosmologiques actuels définissent effectivement un espace absolu ; mais ces modèles ne sont proposés que comme des approximations valables seulement à très grande échelle – lorsqu'on peut considérer comme petites les distances séparant les amas de galaxies. Les propos de Newton, peut-être influencés par la pensée cosmologique de Giordano Bruno, se rapprochent donc des idées du XXe siècle.

(2) Première édition : 1788 ; rééditée en 1965 (libr. A. Blanchard, Paris).

(3) Il s'agit par exemple de coordonnées cartésiennes ; mais pas nécessairement.

des q_j ; et de leurs dérivées $\dot{q}_j$ par rapport au temps l'expression $T-U$, différence de l'« énergie cinétique » T et de l'« énergie potentielle » U ; les dérivées partielles $p_j = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ s'appellent *variables conjuguées* des q_j ; on cherche une fonction H telle que

$$\text{(V)} \qquad \sum_j p_j q_j - L = H(t, q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)$$

(H s'appelle fonction hamiltonienne) ; alors les équations du mouvement prennent la forme canonique de Hamilton :

$$\text{(VI)} \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}; \qquad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots n);$$

elles expriment que l'intégrale

$$\text{(VII)} \qquad a = \int_{t_0}^{t_1} L\,dt \quad [1]$$

prise entre deux instants arbitraires t_0 et t_1, est rendue minimum par le mouvement réel du système : c'est le *principe de Hamilton* ; il entre dans la ligne des *principes variationnels* de la physique, dont le premier fut celui de Fermat, en optique.

Il y a toujours quelque chose de magique dans l'usage des formules : celles de la mécanique analytique semblent avoir joué le rôle d'un langage d'initiés lors des grandes crises de la physique au début du XX^e siècle[2] ; au moment où les concepts traditionnels de temps et d'espace s'effondraient, il était d'ailleurs tout naturel d'utiliser une formulation des lois du mouvement qui semblait faire l'*économie de la géométrie*.

Nous allons voir, au contraire, que la mécanique analytique *superpose une seconde géométrie* à celle de l'espace et du temps[3].

Il est traditionnel – bien que Lagrange ne l'ait pas fait – d'introduire un certain nombre d'espaces pour illustrer les formules de la mécanique analytique ; en particulier l'*espace de configuration*, dont chaque point est repéré par les n variables $q_1, \ldots, q_n$; et l'espace de phases, paramétré par les $2n$ variables $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, que l'on appelle *variables canoniques*.

Les équations canoniques (VI) peuvent s'interpréter comme définissant l'*évolution d'un point dans l'espace de phases* ; c'est cette interprétation qui servi de modèle aux fondateurs de la mécanique statistique et que l'on rencontre aujourd'hui encore dans les traités de mécanique analytique[4].

Cette interprétation suppose évidemment une certaines *permanence* de l'espace de phases : il est bien inutile de chercher un sens géométrique à

---

(1) a s'appelle action hamiltonienne.

(2) Voir par exemple dans B. L. VAN DER WAERDEN, *Sources of Quantum Mechanics* (North Holland, 1967) le rôle qu'ont joué les notions de *variables conjuguées*, de *crochets de Poisson*, etc., dans l'élaboration de la mécanique quantique.

(3) La *géométrie symplectique* que nous définirons ci-dessous.

(4) Voir par exemple R. ABRAHAN, *Foundations of Mechanics* (Benjamin, 1967).

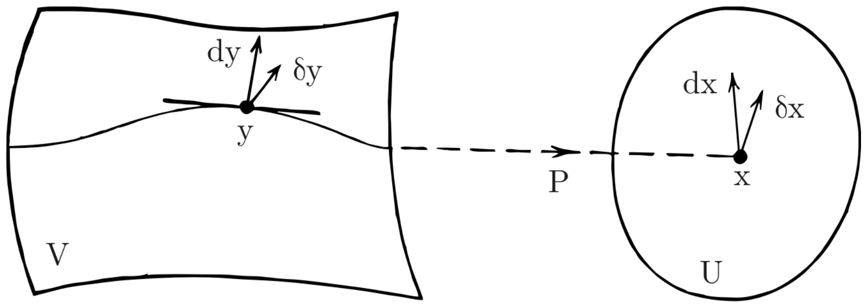

FIG. 1.

l'évolution d'un point dans un espace si cet espace n'est pas comparable à lui-même d'un instant à l'autre.

Or un calcul fort simple montre que *cette permanence est incompatible* avec *la relativité galiléenne* ; l'égalité de deux points de l'espace de phases à des instants différents n'a pas le même sens lorsqu'on change de référentiel.

Nous nous trouvons donc dans l'obligation de renoncer à la géométrisation traditionnelle de la mécanique analytique ; cette catastrophe conceptuelle va faire disparaître, non seulement l'espace de phases et l'espace de configuration, mais même la possibilité de formuler un principe variationnel.

L'ESPACE D'ÉVOLUTION

Il est cependant possible de sauver l'essentiel de la mécanique analytique, en procédant de la façon suivante.

Par une construction analogue à celle de l'espace-temps, nous allons souder l'espace de phases avec le temps ; ce qui donne un espace V (nous l'appellerons *espace d'évolution* du système mécanique) dont chaque point y sera repéré par $2n+1$ coordonnées : $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t$.

Pour interpréter cet espace, nous allons nous placer dans un cas particulier simple – mais aussi instructif qu'un autre ; nous traiterons un point matériel soumis à une force $\vec{F}$; nous noterons m la masse du point, $\vec{r}$ sa position à chaque instant t[1].

Un point y de V est donc déterminé par la donnée simultanée d'une date t, d'une position $\vec{r}$ et d'une vitesse $\vec{v}$, ce que nous noterons $y = \begin{pmatrix} t \\ \vec{r} \\ \vec{v} \end{pmatrix}$; y constitue ce qu'on appelle parfois une *condition initiale* du mouvement.

Bien entendu, ce mouvement est déterminé par l'équation fondamentale de Newton :

$$\text{(VIII)} \qquad \vec{F} = m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

[1] Dans ce cas, le nombre n est égal à 3 ; les q_j sont les coordonnées du point $\vec{r}$ les p_j sont les composantes de l'impulsion $\vec{p}$, produit de la vitesse vectorielle $\vec{v}$ par la masse m.

que nous écrirons sous la forme

$$\text{(IX)} \qquad d\vec{r} - \vec{v}\,dt = 0, \qquad m\,d\vec{v} - \vec{F}\,dt = 0.$$

On constate immédiatement (voir fig. 1) que le point y décrit, lors de l'évolution du système, une courbe tracée dans l'espace V, courbe qui figure un des *mouvements* possibles du point matériel ; que les équations du mouvement (IX) définissent en chaque point y de V la *direction* de tout vecteur dy tangent à la courbe passant par y[(1)].

Avec quelques hypothèses sur la force $\vec{F}$ on peut démontrer qu'il passe par chaque point y de V *une seule* courbe ayant cette propriété de direction : ainsi se formule le principe de *causalité*, exprimant que chaque *condition initiale* définit *un mouvement et un seul*.

Considérons maintenant un couple de vecteurs dy, δy de l'espace V (voir fig. 1), et définissons le nombre suivant[(2)].

$$\text{(X)} \quad \sigma(dy,\delta y) = < m\,d\vec{v} - \vec{F}\,dt, \delta\vec{r} - \vec{v}\,\delta t > - < m\,\delta\vec{v} - \vec{F}\,\delta t, d\vec{r} - \vec{v}\,dt >$$

il est très facile de constater que ce nombre dépend *linéairement* de chacun des vecteurs dy et δy, et qu'il s'annule lorsque ces vecteurs sont choisis égaux : on a l'habitude d'énoncer ces deux propriétés en disant que σ est un tenseur d'ordre 2 antisymétrique, ou plus brièvement une « 2-forme » ; nous l'appellerons *forme de Lagrange*[(3)].

Il est tout aussi élémentaire de constater que les équations du mouvement (IX) peuvent s'écrire, à l'aide de σ, sous la forme

$$\text{(XI)} \qquad \sigma(dy,\delta y) = 0 \qquad \text{quel que soit} \qquad \delta y,$$

ce qu'on écrit aussi[(4)]

$$\text{(XII)} \qquad dy \in \ker(\sigma)$$

$\ker(\sigma)$ étant l'ensemble des dy vérifiant (XI), ensemble que l'on appelle *noyau* de σ.

– Cherchons maintenant à quelle condition les équations du mouvement (XII) peuvent prendre la forme canonique (VII), caractéristique du formalisme hamiltonien ; la réponse est simple[(5)] ; ce qui importe ici, c'est qu'on

(1) On suppose – comme c'est toujours le cas en mécanique classique – que la force $\vec{F}$ est connue en fonction de y, c'est-à-dire de la date, de la position et de la vitesse du point matériel.

(2) Les crochets $<,>$ désignent le *produit scalaire* habituel.

(3) On sait que tout tenseur peut se caractériser, dans un système arbitraire de coordonnées, par des nombres appelés *composantes* du tenseur ; or les composantes de σ ont été construites par Lagrange lui-même (Mécanique Analytique, II, 5, § 2) ; on les appelle d'ailleurs *crochets de Lagrange*.

(4) De l'anglais *kernel*, noyau.

(5) Il est nécessaire et suffisant que la force $\vec{F}$ ne dépende pas de la vitesse et dérive d'un potentiel ; cette condition est effectivement réalisée dans les cas physiques importants.

peut formuler cette condition *par une propriété de la forme de Lagrange* σ seule, propriété qui s'écrit

(XIII) $$d\sigma = 0 \quad [1].$$

Bien entendu ces résultats ne concernent pas seulement le cas d'un point matériel, mais peuvent s'étendre à tous les *systèmes dynamiques* de la mécanique analytique.

L'ESPACE DES MOUVEMENTS

Nous allons maintenant gravir un échelon dans l'abstraction en considérant, à côté de l'espace d'évolution V, l'*espace des mouvements* U (fig. 1) ; c'est un ensemble dont chaque *élément* x est un *mouvement* du système (c'est-à-dire l'une des courbes que nous avons tracées sur V) ; le principe de causalité indique que chaque condition initiale y définit un mouvement x et un seul, donc qu'il existe une application $[y \mapsto x]$ de V sur U (que nous désignons par P sur la figure).

On peut montrer que U possède une structure de *variété*[2] ; que des vecteurs dy, δy définis en un point y de V peuvent se « projeter », grâce à l'application P, par des vecteurs dx, δx « tangents » à U en x[3] ; que U possède aussi une 2-forme σ, définie par

(XIV) $$\sigma(dx, \delta x) = \sigma(dy, \delta y)$$

et que la forme σ de U vérifie aussi l'équation

(XV) $$d\sigma = 0.$$

On montre enfin que la forme σ de U est régulière, c'est-à-dire que son noyau est réduit au seul vecteur nul.

Or il existe un terme mathématique pour désigner une variété munie d'une 2-forme régulière, vérifiant la condition (XV) : on dit que U est une *variété symplectique*[4].

Les formules ci-dessus montrent qu'il est possible, si on le désire, de revenir de U à V[5] ; la description d'un système dynamique par son espace des mouvements est donc aussi complète que celle que donne son espace d'évolution ; elle comporte en plus un avantage important : l'espace des

---

[1]Le symbole d désigne l'opération appelée *dérivation extérieure* ; en introduisant les composantes σ_{kl} de σ, l'équation (XIII) peut s'écrire $\partial_j \sigma_{kl} + \partial_k \sigma_{lj} + \partial_l \sigma_{jk} = 0$. – Le lecteur trouvera toutes les définitions mathématiques utilisées ici dans notre livre *Structure des Systèmes dynamiques* (Dunod, 1969) que nous désignerons par les initiales « S.S.D. ».

[2]C'est-à-dire que U est une réunion d'ensembles dans chacun desquels tout point x peut se repérer par un système de coordonnées numériques, les formules de passage d'un système de coordonnées à un autre étant différentiables ; voir S.S.D., chapitre I.

[3]La notion de variété généralise la notion classique de surface ; de même que les surfaces usuelles possèdent en chaque point un *plan tangent*, de même on peut définir en chaque point d'une variété, un *espace vectoriel tangent*.

[4]Ce terme est une transcription grecque du mot « complexe ».

[5]Définie comme le *produit direct de U par le temps*.

mouvements d'un système composé de plusieurs parties indépendantes est le *produit direct* des espaces des mouvements individuels[(1)] ; ce qui n'a pas lieu avec les espaces d'évolution.

Nous allons désormais *renoncer* à l'espace d'évolution – qui n'aura donc servi que d'intermédiaire épistémologique ; ceci dans le but d'*élargir* la mécanique classique ; on pourra alors traiter des systèmes dynamiques qui ne possèdent pas d'espace de mouvement compatible avec la géométrie de l'espace-temps : tel est le cas des *photons*[(2)], particules de lumière, qui pourront ainsi prendre place dans la mécanique, conformément au vœu de Newton.

Revenons aux cas classiques ; comme nous l'avons vu, la définition même de U implique le *principe de causalité* ; choisir U comme catégorie initiale de la mécanique, c'est donc admettre sans restriction la causalité : celle-ci quitte son statut de *résultat* de la théorie pour en devenir une *condition de cohérence*[(3)].

MATÉRIALISME SYMPLECTIQUE

Considérons un système matériel quelconque. Au terme de l'analyse précédente, nous avons caractérisé le système par une variété symplectique U, son *espace des mouvements*.

La structure symplectique de U est caractérisée par sa 2-forme σ (que nous appellerons encore forme de Lagrange) ; on remarquera qu'elle définit une géométrie au sens de Klein, caractérisée par un groupe Σ d'automorphismes de U ; la propriété caractéristique des éléments de Σ est de donner de la forme σ une *image*[(4)] encore égale à σ[(5)] : nous exprimerons ce fait en disant que les éléments de Σ sont les *symplectomorphismes* de U[(6)].

---

(1)Du point de vue *ensembliste*, $U = U_1 \times U_2$, signifie que tout mouvement x d'un système composé de deux parties indépendantes s'identifie au couple $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ d'un mouvement x_1 du premier système et d'un mouvement x_2 du second ; du point de vue *symplectique*, U possède une structure de variété sur laquelle est définie la forme σ par $\sigma(dx)(\delta x) = \sigma_1(dx_1, \delta x_1) + \sigma_2(dx_2, \delta x_2)$.

(2)Voir ci-dessous.

(3)Cette démarche peut sembler périlleuse ; elle est cependant indispensable pour aller plus loin. Il ne s'agit toutefois que d'un aspect bien particulier de la causalité, parfaitement compatible – nous le verrons – avec le genre d'indéterminisme que l'on rencontre en mécanique statistique ou quantique.

(4)Voir S.S.D., § 4. On suppose d'abord que les éléments de Σ respectent la structure de variété de U, donc qu'ils sont des *difféomorphismes* (S.S.D., § 1).

(5)*A priori*, d'autres possibilités sont ouvertes ; il se pourrait par exemple que σ ne soit définie qu'au signe près ; alors des éléments de Σ pourraient changer son signe. Cette éventualité semble être l'aspect classique d'une hypothèse utilisée par E. Wigner (Gottingen Nachr. Math. Naturw. Kl., 545 (1932)) pour interpréter la « symétrie de temps » T, dans le cadre de la mécanique quantique (voir S.S.D., § 14). Des expériences récentes semblent d'ailleurs exclure cette possibilité ; voir L. Michel, Centre de Phys. Ec. Polyt., R 13 (1968).

(6)Ou *transformations canoniques*. Dans le cas de l'espace de phases classiques, qui possède aussi une structure symplectique, on dit également « transformations de contact »

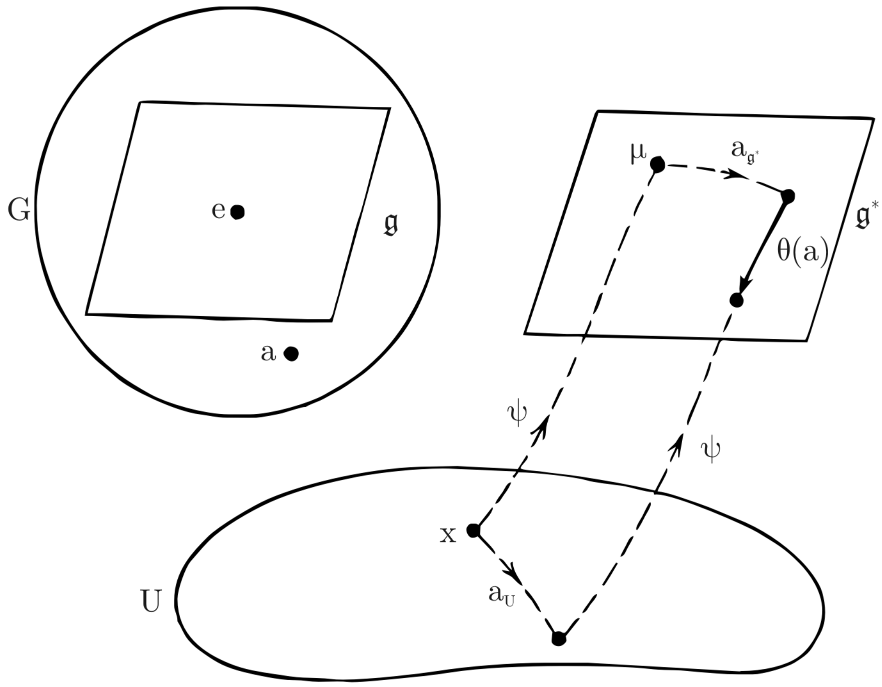

FIG. 2.

Examinons maintenant la compatibilité de la géométrie symplectique de U avec la géométrie galiléenne de l'espace-temps – question au nom de laquelle nous avons récusé les espaces de la mécanique analytique classique.

C'est cette condition de compatibilité qui va constituer le *principe de relativité galiléenne*, dont nous adopterons l'énoncé suivant :

(XVI) Si U est l'espace des mouvements d'un système dynamique isolé, le groupe de Galilée G opère par symplectomorphismes[(1)] sur U.

Cet énoncé est facile à vérifier dans les cas classiques. Mais, *sans rien connaître davantage d'un système mécanique que cet axiome* (XVI), une simple étude mathématique permet de déduire toute une série de faits qui méritent un examen détaillé.

On notera d'abord que le groupe de Galilée G est un groupe de Lie, c'est-à-dire qu'il possède à la fois une structure de groupe et une structure de

[(1)] De façon précise, cela signifie que l'on peut associer à tout élément $a \in G$ un symplectomorphisme a_U de U, de sorte que

$$(a \circ b)_U = a_U \circ b_U \qquad \forall a, b \in G$$

et que l'application $\begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} \mapsto a_U(x)$ soit différentiable (ce dernier axiome met en jeu la structure de variété de G).

variété[(1)] ; comme variété, la dimension de G est 10 ; l'espace vectoriel tangent (défini plus haut) à G en son élément neutre est aussi un espace de dimension 10, $\mathfrak{g}$, que l'on appelle *algèbre de Lie* de G[(2)].

On peut déduire de l'énoncé (XVI) l'existence d'une application ψ de la variété U dans l'espace vectoriel $\mathfrak{g}^*$, dual vectoriel de $\mathfrak{g}$[(3)] (fig. 2) ; ψ est défini, à une constante additive près, par une certaine relation différentielle que nous ne formulerons pas ici[(4)].

Si x est un mouvement du système, il lui est associé ainsi un élément $\mu = \psi(x)$ de $\mathfrak{g}^*$, que nous appellerons *moment galiléen*.

Il existe d'autre part un algorithme permettant de faire opérer le groupe G sur l'espace $\mathfrak{g}^*$ (la « représentation co-adjointe », que nous notons $a \mapsto a_{\mathfrak{g}^*}$) ; ce qui permet de tracer un diagramme (voir figure 2) dont le *défaut de commutation* se mesure par la différence $\psi[a_U(x)] - a_{\mathfrak{g}^*}[\psi(x)]$; on peut montrer que cette différence ne dépend pas du mouvement x, mais seulement, de a ; en la notant $\theta(a)$, on constate que l'opération θ vérifie une certaine identité[(5)] ; identité qui s'exprime en disant que θ est un *cocycle* du groupe G. Comme une constante additive (vectorielle) figure dans le moment, on peut rechercher s'il est possible, soit d'annuler θ, soit de le réduire à une forme standard, par le choix de cette constante ; ce problème entre dans la théorie de la *co-homologie* ; sa résolution conduit aux résultats suivants :

(1) On peut déterminer, par ce procédé, 9 des 10 constantes arbitraires figurant dans μ.

(2) Le *défaut de commutation*[(6)] du diagramme ainsi obtenu se mesure au moyen d'un nombre m.

Le nombre m se calcule facilement dans le cas d'un système de points matériels exerçant mutuellement des forces : il est égal à la somme des masses individuelles de ces points. Dans le cas général, il est clair que m peut être pris comme *définition de la masse du système* – définition qui se formule donc en langage de co-homologie du groupe de Galilée.

Une fois la forme standard adoptée pour μ, on peut en déduire un certain nombre de formules relatives à la variété symplectique U et à son moment galiléen μ ; en examinant à nouveau le cas d'un système de points, on constate que ces formules donnent, *comme théorème*, le « principe » d'*égalité de l'action et de la réaction* ; on trouve également l'*interprétation* du moment μ ; les 9 quantités dont on a pu chasser la constante additive se trouvent être les composantes de l'*impulsion*, du *moment cinétique* et d'un

---

(1) Avec des conditions de compatibilité des deux structures assez naturelles ; voir S.S.D., § 6.

(2) Parce qu'on y définit une certaine opération algébrique, le crochet de Lie ; voir S.S.D., § 6.

(3) Les éléments de $\mathfrak{g}^*$ sont par définition les formes linéaires sur $\mathfrak{g}$.

(4) S.S.D., § 11.

(5) Voir S.S.D., § 11.

(6) Ou « classe de co-homologie ».

vecteur $\vec{g}$ qui caractérise (avec l'impulsion et la masse) le *mouvement rectiligne uniforme du centre de gravité* ; quant à la dixième grandeur, qui comporte une constante additive irréductible, on la reconnaît comme l'*énergie* du système.

Le fait que ces diverses grandeurs (qui peuvent se calculer directement sur l'espace d'évolution) ne dépendent que du mouvement x du système (on dit que ce sont des « constantes du mouvement ») constitue l'ensemble des *théorèmes généraux* de la mécanique classique[(1)].

On peut étudier l'effet d'un changement d'unités sur les longueurs, le temps[(2)] et la forme σ elle-même. Ces effets se manifestent par des *formules d'analyse dimensionnelle*, formules que l'on peut écrire au moyen de trois grandeurs « fondamentales » L, T et A[(3)] ; la définition co-homologique de la *masse* fait apparaître celle-ci comme une grandeur *dérivée*, possédant l'équation aux dimensions $M = ATL^{-2}$; en remplaçant partout A par ML^2T^{-1}, on obtient les formules dimensionnelles classiques, exprimées en fonction des grandeurs M, L, T ; mais les grandeurs L, T, A conduisent à des formules plus symétriques[(4)].

Signalons enfin que l'existence d'un certain sous-groupe privilégié du groupe de Galilée permet de démontrer[(5)] (dans le cas où la masse n'est pas nulle) que la variété U des mouvements est un produit direct[(6)] ; cette décomposition permet de traiter séparément le « mouvement du centre de gravité » et le mouvement « autour » du centre de gravité ; ce qui permet de faire opérer sur U, non seulement le groupe de Galilée, mais un groupe plus grand, de dimension 14. La décomposition passe à l'espace des moments ; dans les cas classiques ces résultats constituent les théorèmes de Kœnig.

Le lecteur qui aura eu la patience de suivre le détail de ce qui précède aura donc constaté que l'on peut ainsi déduire, de la seule formulation *symplectique* (XVI) du principe de relativité, les propriétés que l'expérience a conduit à attribuer communément à la *matière*.

[(1)]Ils sont établis ici pour un système matériel arbitraire, sans se référer à sa décomposition éventuelle en points matériels. – La démonstration généralise un théorème classique d'Emmy Noether (Gottingen Nachr., 235 (1918)), valable dans le cas d'un système possédant un *lagrangien* invariant par un groupe à un paramètre. Mais la démonstration du théorème de Noether implique la nullité de la cohomologie associée ; ce qui prouve en passant qu'un système de masse non nulle *ne possède pas* de lagrangien invariant par le groupe de Galilée. Le lagrangien figurant dans le principe de Hamilton n'est d'ailleurs invariant que par le groupe défini ci-dessus par les formules (II) ; le théorème de Noether laisse donc échapper la constante $\vec{g}$, c'est-à-dire le *principe de l'inertie de Galilée* ; et, nécessairement, la notion même de *masse*.

[(2)]Ces changements d'unité se rattachent aux dilatations de l'espace et du temps, qui constituent des *automorphismes du groupe de Galilée*.

[(3)]Qui désigne la dimension de σ ; il se trouve que c'est aussi celle de l'action hamiltonienne (VII).

[(4)]S.S.D., § 13.

[(5)]S.S.D., § 13.

[(6)]Au sens symplectique que nous avons déjà envisagé plus haut.

Comme nous l'avons vu, un système dynamique isolé possède simultanément deux géométries ; l'une, reflétant la géométrie de l'espace-temps, possède une valeur universelle ; c'est elle qui conduit aux grandeurs attribuées universellement à la matière (masse, énergie, impulsion, etc.) ; on remarquera combien ce caractère universel semble phénoménologique en physique classique[(1)] ; et pourtant il est corrélatif de la géométrie de l'espace-temps, à laquelle on attribue si facilement un caractère *a priori*.

La seconde géométrie (celle des symplectomorphismes de l'espace U des mouvements) est au contraire *spécifique* de chaque système ; il peut arriver, dans certains cas, qu'un groupe de Lie particulier Γ opère sur U sans posséder d'interprétation spatio-temporelle ; son moment n'en aura pas moins d'intérêt pour la physique. On dit dans ce cas que Γ est un *groupe dynamique*.

Un exemple important est le groupe appelé $\mathrm{SO}(4)$, qui opère sur les mouvements képlériens, et qui a été découvert par W. Pauli[(2)] ; ce groupe est « responsable » du caractère périodique des mouvements planétaires, ainsi que de la dégénérescence, dite *accidentelle*, des niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène ; cet « accident » est fondamental pour la chimie, puisque c'est lui qui permet le classement des électrons atomiques en *couches*, d'où dérive la *classification de Mendeleiev*.

On sait que la géométrie galiléenne n'est pas rigoureusement conforme à l'expérience, et qu'il convient – selon la théorie de la relativité d'Einstein – de remplacer le groupe de Galilée par le *groupe de Poincaré*[(3)].

Or il suffit, *sans rien changer aux axiomes symplectiques*, de remplacer le groupe de Galilée par le groupe de Poincaré dans l'énoncé (XVI) ci-dessus pour trouver les principes de la *mécanique relativiste*. Nous allons voir quelques exemples.

A priori, les systèmes relativistes les plus simples seront ceux où le groupe de Poincaré opérera transitivement[(4)] sur l'espace des mouvements.

Il existe un algorithme[(5)] permettant de construire tous ces systèmes ; or on constate que la famille ainsi obtenue contient un modèle satisfaisant de

---

(1)On l'exprime à coups de principes : conservation de la masse, de l'énergie, de l'impulsion, etc. ; mais comme ces principes ne contiennent pas toujours de règles exhaustives pour recenser les différentes formes des grandeurs conservées, on a bien souvent accusé les physiciens de les « inventer » pour sauvegarder un énoncé purement formel.

(2)Zs. f ; Phys. 33, 879 (1925). Pauli considérait seulement l'action infinitésimale du groupe ; pour son action finie, voir H. Bacri, H. Ruegg, J.-M. Souriau, Comm. Math. Phys. 3, 323 (1966).

(3)Appelé aussi groupe de Lorentz non homogène ; sa dimension est encore égale à 10 (voir S.S.D., § 13).

(4)Ce qui signifie que, pour tout couple x, x' de mouvements, il existe un élément a du groupe tel que $x' = a_U(x)$; autrement dit, que *tous les mouvements constituent la même figure de l'espace-temps*.

(5)S.S.D., §§ 11 et 14.

chacune des particules élémentaires connues[(1)] ; les principaux types étant le *point matériel relativiste*, la *particule à spin*[(2)], la *particule à spin de masse nulle*.

Dans ce dernier modèle apparaît une propriété particulière, l'*hélicité*, qui se comporte géométriquement comme une orientation spatiale ; les photons, qui correspondent à ce modèle, sont *polarisés* (circulairement) *à droite* ou *à gauche* suivant le signe de leur hélicité.

Il existe bien entendu des modèles qui ne correspondent à aucune particule actuellement connue ; ainsi le « tachyon » est un modèle de particule dont la vitesse serait toujours plus grande que celle de la lumière[(3)].

LE PARADOXE DU PHYSICIEN

Revenons à la description d'un système matériel par la vanité symplectique U de ses mouvements.

Si ce modèle est correct, l'observation du système permettra de déceler son *mouvement réel*, qui sera un *point* x de U ; quelle peut donc être la signification des *autres points* de U, les « mouvements virtuels ? »[(4)].

Ils caractérisent chacun un mouvement du système qui *pourrait* avoir lieu, mais qui *n'a pas* lieu – et ceci à titre définitif, sans remords possible[(5)] ; on pourrait en conclure qu'ils n'intéressent pas le physicien, spécialiste du « réel » ; et pourtant les notions fondamentales de la physique découlent, nous l'avons vu, de la géométrie de U, c'est-à-dire d'une dialectique du réel et du virtuel.

Nous allons examiner maintenant les réponses, assez diverses, que donnent à ce paradoxe différentes branches de la physique.

[(1)]Il ne peut s'agir que des particules *stables* (au moins à titre d'approximation) ; car les mouvements des particules instables comprennent tout leur processus de création et de désintégration, et ne constituent certainement pas des figures toutes égales.

[(2)]Le spin est donc une propriété « naturelle » de la matière, qui se définit sans faire appel à la mécanique quantique (contrairement à une idée courante) ; il se manifeste par un moment cinétique propre de mesure constante.

Notons que le soin n'est pas non plus un effet spécifiquement relativiste : on construit facilement le modèle galiléen des particules à spin ; il est essentiellement distinct des modèles de toupie (les dimensions des espaces de mouvements sont respectivement 8 et 12).

[(3)]Cette propriété n'est donc pas incompatible avec la théorie de la relativité ; mais elle pose de graves problèmes, car elle dissocie la causalité de la succession temporelle. Cependant, la recherche expérimentale des tachyons a été entreprise.

[(4)]Dans l'énoncé des principes variationnels, tels que celui de Hamilton, on fait aussi appel à des mouvements virtuels – que l'on appelle aussi mouvements *variés* ; mais ces mouvements variés sont beaucoup plus nombreux que les mouvements virtuels considérés ici, parce qu'ils ne vérifient pas les lois du mouvement ; il est d'ailleurs difficile d'en définir l'ensemble avec précision. C'est sans doute pourquoi beaucoup d'esprits témoignent d'une grande méfiance vis-à-vis des formulations variationnelles ; voir par exemple C. W. KILMISTER *Hamiltonian Dynamics* (Longmans, 1964).

[(5)]N'oublions pas que le temps a déjà été englobé, à titre de variable, dans la construction de l'espace d'évolution ; chacun des mouvements x qui constituent U est donc intemporel et ne peut, en aucune façon, être « recommencé ».

Tels sont les *atomes* de Démocrite, Epicure et Lucrèce[(1)] ; le fait que des atomes d'un même type possèdent *le même* espace de mouvements[(2)] manifeste leur *indiscernabilité* ; le fait que les mouvements de deux atomes soient nécessairement *différents* indique *le caractère géométrique de leur individualité*[(3)].

L'ATOMISME

Quoiqu'il ne soit permis d'observer qu'un seul point sur l'espace U des mouvements d'un système matériel, on pourra « explorer » U si l'on dispose d'un grand nombre n de systèmes ayant tous *le même espace* de mouvements U, mais des *mouvements individuels* $x_1, x_2, \dots, x_n$ *différents*.

Si l'on appliquait une règle énoncée plus haut, un mouvement x du système des n atomes serait un n-uple $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de points de U ; l'espace des mouvements du système serait donc la « puissance symplectique n-ème » de U, que nous noterons U^n.

Mais l'indiscernabilité des atomes nous conduit à adopter plutôt l'espace $\hat{U}_n$ des parties de U possédant n éléments ; on peut le construire à partir de U^n en commençant par retrancher la *diagonale* (c'est-à-dire les mouvements $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ dans lesquels deux au moins des x_j coïncident), ce qui laisse une partie $\tilde{U}^n$ de U^n ; puis faisant le *quotient* de $\tilde{U}_n$ par le groupe $\mathfrak{S}_n$ des *permutations* des atomes[(4)] ; il se trouve que $\mathfrak{S}_n$ est un groupe de *symplectomorphismes* de U^n, et que l'on peut faire « passer » au quotient $\hat{U}_n$ la structure symplectique de $\tilde{U}^n$; si bien que nous possédons un modèle du système composé qui est encore conforme aux principes symplectiques de la mécanique[(5)].

---

(1)Le vocabulaire moderne nous obligerait à choisir entre les termes de *molécule*, *atome*, *particule*, *particulé*, *élémentaire*, sans que ces distinctions signifient quelque chose de réellement fondamental ; le dualisme aristotélicien entre *forme* et *matière*, au nom duquel nous parlons de la *composition* d'une molécule d'eau ou d'un atome d'uranium, n'est en fait qu'une approximation galiléenne, incompatible avec la relativité (voir S.S.D., § 15) ; la relativité nous ramène donc à l'*insécabilité* des atomes exprimée par Lucrèce.

(2)Et non des espaces seulement *isomorphes*, en l'un des sens que les mathématiques permettent de donner à ce terme.

(3)Dans l'hypothèse contraire, les deux mouvements constitueraient la même figure de l'espace-temps, il n'y aurait plus qu'un seul atome.

(4)On dit réciproquement que $\tilde{U}^n$ est un *revêtement* de $\hat{U}_n$.

(5)Contrairement à un préjugé courant, l'indiscernabilité peut donc se formuler sans recourir à la mécanique quantique.

Des raisons cosmologiques ont conduit Lucrèce à considérer comme *illimité* le nombre d'atomes d'un même type susceptibles d'exister dans l'univers ; on peut formuler cette hypothèse en définissant l'espace des mouvements de ces atomes comme la *somme* infinie $U' = \hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2 + \cdots$ des modèles construits ci-dessus pour chaque valeur de n[(1)] ; on peut définir directement U' comme l'*ensemble des parties finies* de U ; U' possède encore une structure de variété symplectique, mais sa dimension n'est pas la même en tous ses points[(2)].

Par exemple, si l'on choisit U comme l'espace des mouvements d'un photon, tel qu'il a été construit plus haut[(3)], on obtient un *modèle classique de lumière*, bien différent de celui de Maxwell ; nous allons voir cependant qu'il est plus satisfaisant, à certains égards ; ceci malgré l'archaïsme apparent des considérations épistémologiques évoquées ici.

La mécanique statistique

Un point de vue tout à fait différent permet d'impliquer dans le réel l'espace U des mouvements ; il consiste à supposer que le mouvement observable d'un système n'est pas un point de U, mais une « tache » ; de façon plus précise, qu'il s'agit d'une *loi de probabilité* supportée par U.

Telle est la définition d'un *état*, au sens de la mécanique statistique[(4)] ; grâce à la notion de moment, on peut définir un ensemble remarquable de tels états statistiques, généralisant l'« ensemble canonique » de Gibbs ; ce qui permet de formuler les règles usuelles de la *thermodynamique*, et de leur donner une certaine généralisation ; ainsi on peut traiter aussi bien le gaz relativiste que le gaz parfait usuel ; en adoptant le modèle de lumière défini ci-dessus, on trouve une description du « *rayonnement du corps noir* » qui est qualitativement satisfaisante[(5)] ; quantitativement, le modèle doit être perfectionné pour tenir compte des effets quantiques[(6)].

---

(1) Dans cette écriture, $\hat{U}_0$ est réduit à un point ; $\hat{U}_1$ peut être identifié à U.

(2) U' conserve une propriété topologique importante : la *compacité locale*.

(3) Il est indispensable d'accorder au photon les deux *hélicités* possibles.

(4) La description d'un état statistique au moyen de l'espace des phases est plus compliquée ; voir G. Mackey, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Benjamin, 1963).

(5) On obtient correctement la loi de Stefan-Boltzmann (proportionnalité de l'énergie à la 4^{e} puissance de la température absolue) et l'expression absolue de la pression de radiation ; on évite la « catastrophe ultraviolette » qui rend inacceptable la loi de Rayleigh-Jeans (obtenue par application des méthodes de la mécanique statistique au *modèle de Maxwell*).

(6) Le spectre prévu pour le rayonnement diffère du spectre réel, qui est donné par la formule de Planck.

QUANTIFICATION GÉOMÉTRIQUE

Nous n'évoquerons ici que brièvement une méthode de quantification[1] qui consiste à associer à l'espace U des mouvements classiques d'un système un autre espace Y ; Y est encore une variété, que nous appellerons *variété quantique* ; elle possède *sa propre géométrie*, construite à l'aide d'une 1-forme, et qui se définit par le groupe des « *quantomorphismes* » ; il existe une application privilégiée de Y sur U, qui fait de Y un « espace fibré principal » de base U ; il en résulte que chaque quantomorphisme de Y se « projette » suivant un symplectomorphisme de U.

Cette construction, qui géométrise le *principe de correspondance*, permet de réaliser effectivement les *relations de commutation* postulées par Dirac, Pauli et Heisenberg comme principes de la mécanique quantique ; dans cette réalisation, les *états quantiques* sont des fonctions définies sur Y, qui se projettent sur U suivant des états statistiques : ainsi se formalise l'*interprétation probabiliste* de la mécanique quantique ; on peut aussi retrouver et interpréter les diverses *équations d'onde* qui régissent les particules libres.

D'autre part, si on applique cette construction à la variété U' des mouvements d'un système d'atomes en nombre indéterminé (voir plus haut), on trouve l'algorithme appelé fort improprement « seconde quantification » ou « quantification des champs »[2].

Indiquons quelques aspects proprement géométriques de cette méthode.

La variété U étant donnée, la construction de Y n'est pas toujours possible ; lorsqu'elle est possible, il existe une règle topologique permettant de recenser toutes les « quantifications » distinctes de U[3].

Par exemple, le modèle de *particule à spin* construit plus haut n'est « quantifiable » que si le spin est un multiple entier de $\frac{h}{4\pi}$ (h étant la constante de Planck), ce qui est bien le cas de toutes les particules connues ; la quantification est alors unique. Au contraire, dans le cas d'un système de n particules indiscernables représenté par l'espace $\hat{U}_n$ ci-dessus, il existe exactement

[1] S.S.D., chapitre V.

[2] On démontre ainsi les relations de commutation ou d'anticommutation des opérateurs de création et d'annihilation. – Si on songe aux approximations que nous avons faites en construisant U', il n'est pas étonnant que ce schéma rencontre des difficultés ; c'est pourtant lui qui a conduit aux résultats les plus brillants de la mécanique quantique. – Dans le cas des photons (évoqué plus haut) ce schéma permet de décrire un certain type de lumière (en particulier la *lumière cohérente*) au moyen des équations de Maxwell, décrivant des photons qui sont tous dans le même état quantique ; dans le cas des électrons, les relations d'anticommutation conduisent au *principe d'exclusion* de Pauli.

[3] Il existe autant de quantifications que le *groupe d'homotopie* de U possède de *caractères* (S.S.D., § 18).

deux quantifications distinctes ; les deux cas se rencontrent effectivement dans la nature[1].

Si un groupe de Lie opère par quantomorphismes sur la variété Y, on obtient par projection un *groupe dynamique* de U ; mais l'opération inverse n'est pas toujours possible ; il faut souvent construire une « extension » d'un groupe dynamique avant de pouvoir le quantifier. Cette remarque permet d'expliquer certains paradoxes de la mécanique quantique : par exemple l'utilisation des *spineurs*[2], êtres géométriques sur lesquels on ne peut pas faire opérer le groupe de Poincaré lui-même.

Il y a longtemps que l'on a remarqué que l'interprétation probabiliste initiale de la mécanique quantique est insuffisante : il existe des états quantiques, dits « mélangés », qui nécessitent une description plus élaborée[3].

Or ces états peuvent se définir, non plus par des fonctions définies sur Y, mais par des fonctions définies sur le groupe des quantomorphismes de Y ; ce qui donne une réponse originale au paradoxe du physicien : la géométrie n'est plus construite à partir du réel et du virtuel ; c'est au contraire le réel qui est subordonné à la géométrie.

(1) On les appelle « statistique de Bose-Einstein » et « statistique de Fermi-Dirac » (cas des photons et des électrons). Par contre, les *parastatistiques* que l'on a imaginées, et qui sont incompatibles avec le présent schéma géométrique, n'ont pas été observées.

(2) Dans la théorie des particules de spin $1/2$ (électrons, neutrinos).

(3) On les rencontre notamment en *chimie quantique*.